**Zofia Zielińska-Kolasińska**
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach



# ĆWICZENIA

działania wewnętrzne w zbiorze, element neutralny, element odwrotny, własności działań, grupa, grupa abelowa, ciało

(wersja: 23 października 2020)

---

**Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.**

## Zakres materiału

1. Budowanie tabelek działań;
2. Sprawdzanie, czy wzór określa działanie wewnętrzne w danym zbiorze;
3. Badanie przemienności i łączności działania;
4. Znajdowanie elementu neutralnego i elementów odwrotnych, o ile istnieją;
5. Sprawdzanie, czy dany zbiór wraz z działaniem tworzą grupę;
6. Sprawdzanie, czy grupa jest abelowa;
7. Sprawdzanie, czy dana struktura algebraiczna jest ciałem;

## Zadania

1. Zbudować tabelki działań $+_5$ i $\cdot_5$ w zbiorze $\mathbb{Z}_5$.
2. Czy działanie $+$ w zwykłym sensie jest działaniem w zbiorze liczb niewymiernych?
3. W których ze zbiorów: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{0\}$ wzór $a \circ b = a^2 - b^2$ określa działanie?
4. Czy w zbiorze wielomianów ustalonego stopnia o współczynnikach rzeczywistych dodawanie jest działaniem?
5. Zbadać, czy działanie $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $A$. W przypadku negatywnej odpowiedzi, wskazać takie $a, b \in A$, że $a \circ b \notin A$.
   (a) $a \circ b = 5a - 7b$, $A = \mathbb{Z}$,
   (b) $a \circ b = |a| + |b|$, $A = \mathbb{Z}$,
   (c) $a \circ b = ab + 2a + 2b + 2$, $A = (-2, +\infty)$,
   (d) $a \circ b = ab - a - b + 2$, $A = \mathbb{R} - \{1\}$,

(e) $a \circ b = a + b$, $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

(f) $a \circ b = ab + a + b$, $A = (-1, +\infty)$,

(g) $a \circ b = ab + a + b$, $A = \mathbb{R} - \{-1\}$,

(h) $a \circ b = ab - 2a - 2b + 6$, $A = (2, +\infty)$,

(i) $a \circ b = ab - 2a - 2b + 6$, $A = \mathbb{R} - \{2\}$,

(j) $a \circ b = ab + a + b$, $A = (-\infty, -1)$.

6. W zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określono działanie wewnętrzne $\circ$. Zbadać, czy działanie to jest przemienne, łączne, ma element neutralny.

(a) $a \circ b = 5(a + b)$,

(b) $a \circ b = a - b$,

(c) $a \circ b = 2a - 7b$.

7. Dla działań określonych w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorami:
$a \oplus b = a + b + 1$,
$a \odot b = ab + a + b$,
sprawdzić, że działanie $\oplus$ jest rozdzielne względem działania $\odot$

8. Sprawdzić, że poniższe działania określone w zbiorze $\mathbb{R}$ są przemienne i łączne oraz to, że każde z nich ma element neutralny. Dla każdego działania wyznaczyć te elementy zbioru $\mathbb{R}$, dla których istnieją elementy odwrotne i wyrazić te elementy odwrotne do $a$ w zależności od $a$:

(a) $a \oplus b = a + b + 1$,

(b) $a \odot b = ab + a + b$.

9. Zbadać, czy działanie $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $A$. W przypadku negatywnej odpowiedzi, wskazać takie $a, b \in A$, że $a \circ b \notin A$.

(a) $a \circ b = a + b$, $A = \{-1, 1\}$,

(b) $a \circ b = ab$, $A = \{-1, 0, 1\}$,

(c) $a \circ b = a - b$, $A = \mathbb{Z}$,

(d) $a \circ b = a^2 + b^2$, $A = \mathbb{Z}$,

(e) $a \circ b = a + b - 3$, $A = \mathbb{R}$.

10. W zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określono działanie wewnętrzne $\circ$. Zbadać, czy działanie to jest przemienne, łączne, ma element neutralny.

(a) $a \circ b = ab + b$,

(b) $a \circ b = a$,

(c) $a \circ b = 4a + b$.

11. Ile jest działań w $n$-elementowym zbiorze $A$?

12. Ile jest działań w zbiorze 2-elementowym?

13. Dla danego $n \in \mathbb{N}$ zbudować tabelki działań $+_n$ i $\cdot_n$:

(a) $n = 2$,

(b) $n = 4$,

(c) $n = 6$.

Uwaga: działania $+_n$ i $\cdot_n$ oznaczają odpowiednio:
$a +_n b := (a + b) \bmod n$,
$a \cdot_n b := (a \cdot b) \bmod n$.

14. Utworzyć tabelki wszystkich 16 działań w zbiorze $A = \{a, b\}$.

15. Ile zer na końcu ma liczba działań w zbiorze stuelementowym?

16. Czy działanie $*$ określone w zbiorze $\mathbb{Q}$ wzorem
$a * b = \frac{a+b}{2}$ (średnia arytmetyczna)
jest łączne i czy ma element neutralny?

17. Czy mnożenie skalarne wektorów na płaszczyźnie jest działaniem?

18. Działanie $\diamond$ jest określone w zbiorze $\mathbb{R}^+$ wzorem
$a \diamond b = 5^{\log_5 a \cdot \log_5 b}$.
Sprawdzić, czy jest ono przemienne i łączne. Znaleźć element neutralny tego działania. Wyznaczyć elementy odwrotne do tych liczb $a \in \mathbb{R}^+$, które taki element mają.

19. Działanie $\mp$ w zbiorze $\mathbb{R}^+$ jest określone wzorem
$a \mp b = \frac{ab}{a+b}$.
Sprawdzić, że jest ono przemienne i łączne. Wykazać, że działanie $\mp$ nie ma elementu neutralnego.

20. Działanie $\circ$ jest określone w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem
$a \circ b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3$.
Sprawdzić, czy jest ono przemienne lub łączne. Znaleźć element neutralny tego działania. Wyznaczyć elementy odwrotne do tych liczba $a \in \mathbb{R}$, które taki element mają.

21. Działanie $\sqcup$ jest określone w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem
$a \sqcup b = \log_5(5^a + 5^b)$.
Sprawdzić, czy jest ono przemienne, łączne i czy posiada element neutralny.

22. Działanie $\sqcap$ jest określone w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem
$a \sqcap b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.
Sprawdzić, czy jest ono przemienne, łączne i czy posiada element neutralny.

23. Działania $\vee$ i $\wedge$ są określone w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorami
$a \vee b = \max(a, b)$,
$a \wedge b = \min(a, b)$.

    (a) Sprawdzić, czy każde z nich:

        i. jest przemienne,

        ii. jest łączne,

        iii. posiada element neutralny.

    (b) Dla każdego z działań wskazać element neutralny w przedziale $\langle 4, 5 \rangle$.

    (c) Czy działanie $\vee$ jest rozdzielne względem działania $\wedge$?

    (d) Czy działanie $\wedge$ jest rozdzielne względem działania $\vee$?

Uwagi dotyczące dwóch ostatnich podpunktów:

(a) sprawdzić za każdym razem zarówno rozdzielność prawo-, jak i lewostronną,

(b) wypisać wszystkie możliwe przypadki $a \leqslant b \leqslant c$, $a \leqslant c \leqslant b$, $b \leqslant a \leqslant c$ itd. i dokonać sprawdzenia w formie tabelek.

24. Zbudować tabelki działań $+_2$ i $\cdot_2$, gdzie:
$a +_2 b := (a + b) \bmod 2$,
$a \cdot_2 b := (a \cdot b) \bmod 2$.

25. Działanie $\sqcap$ jest określone w zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem
$a \sqcap b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.
Sprawdzić, czy jest ono przemienne, łączne i czy posiada element neutralny.

26. Niech działanie określone będzie wzorem
$a \odot b = ab + a + b$ w zbiorze liczb $\mathbb{R}$.
Znaleźć element neutralny działania oraz wyznaczyć te elementy zbioru $\mathbb{R}$, dla których istnieje element odwrotny i wyrazić ten element odwrotny do $a$ w zależności od $a$

27. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}$ wraz z działaniem
$a \circ b = a + b + 5$
tworzy grupę. Czy grupa ta jest abelowa?

28. Spradzić, że zbiór $\mathbb{Z}$ jest grupą względem działania $*$ określonego w zbiorze $\mathbb{Z}$ wzorem

$$a * b = \begin{cases} a + b & \text{dla} \quad a \in 2\mathbb{Z}, \\ a - b & \text{dla} \quad a \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

29. Sprawdzić, że zwykłe dodawanie i mnożenie liczb są działaniami w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Wykazać, że struktura algebraiczna $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), +, \cdot)$ jest ciałem.

30. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}$ wraz z działaniem
$a \circ b = ab - a - b + 2$
tworzy grupę.

31. Sprawdzić, że zbiór
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
tworzy ciało względem zwykłego dodawania i mnożenia liczb w tym zbiorze.

32. Sprawdzić, czy dana para jest grupą (symbole $+$ i $\cdot$ oznaczają tu zwykłe dodawanie i mnożenie liczb z danego zbioru):

(a) $(\mathbb{R}, +)$,

(b) $(\mathbb{R}, \cdot)$,

(c) $(\mathbb{Z}, +)$,

(d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(e) $(\mathbb{N}, +)$,

(f) $(\{-1, 1\}, \cdot)$,

(g) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(h) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$,

(i) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$,

(j) $(\mathbb{R}^+, +)$,

(k) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$,

(l) $(\{5^k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$,

(m) $(\langle 0, 1\rangle, \cdot)$,

(n) $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), +)$,

(o) $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \cdot)$.

33. Sprawdzić, że zbiór $\mathbb{Z}$ tworzy grupę abelową względem działania $\oplus$ określonego wzorem $a \oplus b = (-1)^a b + (-1)^b a$.

34. Niech $D := \mathbb{R} - \{0; 1\}$ i niech dla $i = 1, \ldots, 6$ funkcje $f_i : D \to D$ będą określone wzorami:
$f_1(x) = x$,
$f_2(x) = \frac{-x-1}{x}$,
$f_3(x) = \frac{-1}{x+1}$,
$f_4(x) = \frac{1}{x}$,
$f_5(x) = \frac{-x}{x+1}$,
$f_6(x) = -x - 1$.
Sprawdzić, że składanie funkcji $\circ$ jest działaniem w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ (zbudować tabelkę tego działania). Czy para $(G, \circ)$ jest grupą?

35. Sprawdzić, że zbiór $M$ macierzy postaci $\begin{bmatrix} (-1)^a & a \\ 0 & (-1)^a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, tworzy grupę abelową względem mnożenia macierzy.

36. Niech dla $i = 1, 2, 3, 4$ funkcje $f_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ będą określone wzorami:
$f_1(x) = x$,
$f_2(x) = -x$,
$f_3(x) = \frac{1}{x}$,
$f_4(x) = \frac{-1}{x}$.
Sprawdzić, że składanie funkcji $\circ$ jest działaniem w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ (zbudować tabelkę tego działania). Czy para $(G, \circ)$ jest grupą?
Uwaga: $\mathbb{R}^*$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych różnych od 0.

37. Niech $D := \mathbb{R} - \{0; 1\}$ i niech dla $i = 1, \ldots, 6$ funkcje $f_i : D \to D$ będą określone wzorami:
$f_1(x) = x$,
$f_2(x) = \frac{1}{1-x}$,
$f_3(x) = \frac{x-1}{x}$,
$f_4(x) = \frac{1}{x}$,
$f_5(x) = 1 - x$,
$f_6(x) = \frac{x}{x-1}$.
Sprawdzić, że składanie funkcji $\circ$ jest działaniem w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ (zbudować tabelkę tego działania). Czy para $(G, \circ)$ jest grupą?

## Bibliografia

1. *Zbiór zadań z algebry* A. I. Kostrikin