Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

suma/różnica/iloczyn macierzy, transpozycja macierzy, wyznacznik macierzy

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie sumy i różnicy macierzy;
2. Obliczanie iloczynu macierzy przez liczbę;
3. Obliczanie iloczynu macierzy przez macierz;
4. Transponowanie macierzy;
5. Obliczanie wyznacznika macierzy $2x2$, $3x3$ (wzór Sarrusa), $4x4$ (rozwinięcie Laplace'a);
6. Sprowadzanie macierzy do prostszej postaci poprzez stosowanie na wierszach operacji elementarnych pierwszego typu, a następnie obliczanie wyznacznika za pomocą rozwinięcia Laplace'a;

Zadania

1. Obliczyć sumy i różnice macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Obliczyć sumę i różnice ($A - B$, $B - A$) macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Obliczyć iloczyn macierzy przez liczbę

(a) $2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

(c) $5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Obliczyć iloczyn macierzy

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix}3 & 6 & -7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}10 & 5 & 8\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix}5\\-2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & -2 & 4\end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix}4\\1\\5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 8 & 2\end{bmatrix}$,

(g) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\4 & 7 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\2 & 3 & 2 & 0\\-1 & -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$,

(h) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\2 & 8 & -2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 2 & -5 & 0\\5 & 3 & 7 & 1\\-1 & 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$,

(i) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\5 & 2 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\\1 & -2 & -5 & -4\end{bmatrix}$.

5. Czy da się obliczyć iloczyny następujących macierzy? Jeżeli tak, to podać wymiar macierzy, będącej iloczynem.

(a) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\5 & 2 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-2\\4\end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\5 & 2 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix}0 & 0\\5 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-2\\4\end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\\1 & -2 & -5 & 4\end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\\1 & -2 & -5 & -4\end{bmatrix}$,

(g) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,

(h) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$,

(i) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

6. Obliczyć transpozycję macierzy (A^T) dla następujących macierzy:

(a) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}$,

(d) $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\-1 & 3\\0 & -3\end{bmatrix}$,

(e) $A = \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\end{bmatrix}$,

(f) $A = \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\end{bmatrix}$,

(g) $A = \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\\1 & -2 & -5 & -4\end{bmatrix}$,

(h) $A = \begin{bmatrix}1 & 8 & 2 & 12\\2 & 9 & 3 & 5\\1 & -2 & -5 & -4\\3 & -9 & -3 & 5\end{bmatrix}$.

7. Dla macierzy z poprzedniego zadania obliczyć $(A^T)^T$.

8. Obliczyć wyznaczniki macierzy

(a) $A_1 = \begin{bmatrix}7\end{bmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$,

(c) $B_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$,

(d) $B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$,

(e) $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(f) $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(g) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(h) Obliczyć wyznacznik macierzy D korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem innego wiersza lub kolumny niż w poprzednim podpunkcie.

9. Sprowadzić macierze do prostszej postaci operacjami elementarnymi pierwszego typu na wierszach, a następnie obliczyć wyznacznik stosując rozwinięcie Laplace'a.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ -2 & 5 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.