Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

formy dwuliniowe i ich macierze w zadanej bazie, macierze kongruentne, formy dwuliniowe symetryczne, formy kwadratowe i formy dwuliniowe im odpowiadające, macierze form kwadratowych

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Sprawdzanie, czy odwzorowanie jest funkcjonałem dwuliniowym;
2. Sprawdzanie, czy funkcjonał jest symetryczny;
3. Znajdowanie macierzy formy h w zadanej bazie;
4. Macierze kongruentne;
5. Znajdowanie formy kwadratowej stowarzyszonej z formą dwuliniową;

Zadania

1. Sprawdzić, czy następujące odwzorowania $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ są funkcjonałami dwuliniowymi. Które z nich są symetryczne?
   (a) $h((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + x^2y' + z'$;
   (b) $h((x,y,z),(x',y',z')) = xz' + yx' + 2$;
   (c) $h((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yz' + zz'$;
   (d) $h((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + z'$;
   (e) $h((x,y,z),(x',y',z')) = 0$;
   (f) $h((x,y,z),(x',y',z')) = 1$.
2. Znaleźć macierze podanych form dwuliniowych w bazach standardowych:
   (a) $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
   $$h((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$
   (b) $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$h((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

(c) $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$,

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ix_1y_2 + (2 - 4i)x_2y_1.$$

3. Rozpatrzmy formę dwuliniową $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 5x_1y_4 + 6x_2y_3$$
$$-4x_2y_4 + 7x_3y_3 - 3x_4y_1 + 8x_4y_3.$$

Niech $\mathcal{A} = \{(2, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Znaleźć $G(h; st)$ oraz $G(h; \mathcal{A})$. Wskazówka: kongruencja macierzy!

4. Niech $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową, która w bazie $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ma macierz

$$G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz $G(h; \mathcal{B})$ dla bazy $\mathcal{B} = \{(2, 3, 1), (3, 4, 2), (0, 1, 2)\}$ oraz znaleźć wzór na h (to znaczy takie liczby $a_{ij} \in \mathbb{R}$, że $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j$ dla wszystkich (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)).

5. Dla poniższych form kwadratowych q znaleźć przykłady form dwuliniowych takich, że $q(\alpha) = h(\alpha, \alpha)$. Wskazać także formy dwuliniowe symetryczne.

   (a) $q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_1((x_1, x_2)) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_2^2$;

   (b) $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
   $$q_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

6. Znaleźć formę kwadratową stowarzyszoną z formą dwuliniową $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2.$$

7. Znaleźć wskazane macierze form kwadratowych q:

   (a) $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $q((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $G(q; st) =?$;

   (b) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q((x_1, x_2)) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2$, $G(q; st) =?$, $G(q; \mathcal{A}) =?$, gdzie $\mathcal{A} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

8. Znaleźć macierz formy dwuliniowej $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2,$$

w bazie kanonicznej oraz w bazie $\mathcal{A} = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

9. Znaleźć macierz formy dwuliniowej $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3,$$

w bazie kanonicznej oraz w bazie $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, -1)\}$.

10. Dla formy kwadratowej $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$q((x_1, x_2)) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2$$

znaleźć przykłady form dwuliniowych takich, że $q(\alpha) = h(\alpha, \alpha)$. Wskazać także formę dwuliniową symetryczną.

11. Dana jest forma kwadratowa

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \to 2x_1^2 - x_2x_3 + 3x_3^2 \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczyć macierz f w bazie kanonicznej oraz rząd f.

12. Niech $f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \to x_1x_2 \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest formą kwadratową. Wyznaczyć macierz f w bazie standardowej.

Bibliografia

1. *Wykłady z algebry liniowej (skrypt)*, T. Koźniewski