

ĆWICZENIA

formy kwadratowe i ich macierze, diagonalizacja formy kwadratowej, formy dodatnio i ujemnie (pół-/nie-)określone, kryteria wartości własnych i Sylwestera

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Diagonalizacja formy kwadratowej - trzy sposoby;
2. Formy dodatnio i ujemnie (pół-/nie-)określone;
3. Kryterium wartości własnych określoności formy kwadratowej;
4. Kryterium Sylwestera określoności formy kwadratowej;

Zadania

1. Dla zadanej formy kwadratowej q znaleźć jej postać diagonalną na trzy sposoby (za pomocą bazy prostopadłej przestrzeni dwuliniowej (V, h) , za pomocą wektorów własnych symetrycznej macierzy rzeczywistej (dla $K = \mathbb{R}$); metodą Lagrange'a (metodą uzupełniania do kwadratów):
 - (a) $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y)) = x^2 + 4xy + y^2,$
 - (b) $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 2x_3x_4.$
2. Zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona:
 - (a) $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2,$
 - (b) $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz,$
 - (c) $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((a, b, c, d)) = a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 6bd + 4cd.$
3. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = -x^2 + ry^2 + rz^2 + 4xy + 2yz$ jest ujemnie określona?
4. Stosując wartości własne zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona lub półokreślona: $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y)) = x^2 + 9y^2 + 6xy.$
5. Dla jakich wartości parametrów $r, t \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = x^2 + 2rxy + 4y^2 + sz^2$ jest

- (a) dodatnio określona?
- (b) dodatnio półokreślona?
- (c) ujemnie określona?
- (d) ujemnie półokreślona?
- (e) nieokreślona?

6. Dla zadanej formy kwadratowej q znaleźć jej postać diagonalną:

(a) $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2,$

(b) $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3,$

(c) $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_3x_4.$

7. Stosując wartości własne zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona lub półokreślona: $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z, t)) = 5x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 + 6xy + 4zt.$

8. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $s \in \mathbb{R}$, dla których odwzorowanie $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2)) = x_1^2 + sx_1x_2 + x_2^2 + s^2 - 4$ jest formą kwadratową, która jest

- (a) dodatnio określona,
- (b) nie jest ujemnie określona,
- (c) jest dodatnio półokreślona.

Bibliografia

1. *Wykłady z algebry liniowej (skrypt)*, T. Koźniewski