Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

iloczyn skalarny, bazy ortogonalne, bazy ortonormalne

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Sprawdzanie, czy zadana funkcja jest iloczynem skalarnym;
2. Badanie ortogonalności wektorów;
3. Znajdowanie wektorów ortogonalnych do wskazanego wektora lub układu wektorów;
4. Sprawdzanie, czy podane układy wektorów tworzą bazę ortogonalną lub ortonormalną;
5. Znajdowanie bazy podprzestrzeni $W^{\perp}$, kiedy znana jest baza przestrzeni W lub W jest przestrzenią rozwiązań danego układu równań;

Zadania

1. Czy podane funkcje są iloczynami skalarnymi w rozważanych przestrzeniach liniowych?
   (a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$
   dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
   (b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 5x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + y_1y_2$
   dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
   (c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$
   dla $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,
2. Zbadać ortogonalność wektorów $\vec{u} = (2, -3, 1, -1)$, $\vec{v} = (6, 1, -2, 7)$ w przestrzeni eukidesowej $\mathbb{E}^4$.
3. Znaleźć wszystkie wektory ortogonalne do wektora $(1, 0, 1, 0)$ i wskazać taki wektor o normie równej 3.
4. Czy podane układy są bazami ortogonalnymi lub ortonormalnymi odpowiednich przestrzeni liniowych? Znaleźć współrzędne wskazanych wektorów w tych bazach.

(a) $\vec{v}_1 = (2, -4)$,
$\vec{v}_2 = (6, 3)$,
$\vec{u} = (1, 2) \in \mathbb{E}^2$,

(b) $\vec{v}_1 = (\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}})$,
$\vec{v}_2 = (\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$,
$\vec{v}_3 = (\sqrt{\frac{1}{6}}, -2\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}})$,
$\vec{u} = (0, 1, 0) \in \mathbb{E}^3$.

5. W $\mathbb{R}^4$ znaleźć taki wektor $\vec{\alpha}$, który wraz z układem
$\vec{v}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$,
$\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)$,
$\vec{v}_3 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$
tworzy bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz wektor $\beta = (2, 4, 6, 2)$ ma w tej bazie czwartą współrzędną równą 3.

6. Znaleźć bazę podprzestrzeni $W^\perp$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeśli $W = \text{lin}((1, 1, 0, -1), (-1, 0, 2, 0))$.

7. Znaleźć bazę $V^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$, jeśli $V \subseteq \mathbb{R}^4$ jest przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 2y + z + 3t = 0 \end{cases}$$

8. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

oraz niech
$W_t = \text{lin}((2, 5, 0, 0), (t + 2, 4 + 3t, -2 + t, (t - 2)^2)$. Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

(a) $W_t \subseteq W^\perp$,

(b) $W_t = W^\perp$.

9. Czy podane funkcje są iloczynami skalarnymi w rozważanych przestrzeniach liniowych?

(a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$
dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

(b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$
dla $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

(c) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$
dla $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

(d) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2$ dla $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

(e) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$
dla $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

10. Zbadać ortogonalność wektorów $\vec{u} = (1, 4, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, -1, 2, -1)$ w przestrzeni eukidesowej $\mathbb{E}^4$.

11. Opisać zbiór wszystkich wektorów ortogonalnych do każdego z wektorów $(2, 1, 0, 1)$, $(0, -2, 1, 1)$ i wskazać jeden wektor z tego zbioru o normie równej 2.

12. Czy podane układy są bazami ortogonalnymi lub ortonormalnymi odpowiednich przestrzeni liniowych? Znaleźć współrzędne wskazanych wektorów w tych bazach.

    (a) $\vec{v_1} = (3\sqrt{\frac{1}{10}}, -\sqrt{\frac{1}{10}})$,
    $\vec{v_2} = (\sqrt{\frac{1}{10}}, 3\sqrt{\frac{1}{10}})$,
    $\vec{u} = (5, 6) \in \mathbb{E}^2$,

    (b) $\vec{v_1} = (1, 3, -2)$,
    $\vec{v_2} = (-1, 1, 1)$,
    $\vec{v_3} = (5, 1, 4)$,
    $\vec{u} = (1, 0, 1) \in \mathbb{E}^3$,

    (c) $\vec{v_1} = (1, 1, 1, 1)$,
    $\vec{v_2} = (3, -1, -1, -1)$,
    $\vec{v_3} = (0, 2, -1, -1)$,
    $\vec{v_4} = (0, 0, 1, -1)$,
    $\vec{u} = (1, 2, -3, 2) \in \mathbb{E}^4$,

    (d) $\vec{v_1} = (\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0)$,
    $\vec{v_2} = (0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$,
    $\vec{v_3} = (\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{1}{3}})$,
    $\vec{v_4} = (-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$,
    $\vec{u} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{E}^4$.

13. Znaleźć bazę podprzestrzeni $V^\perp$, jeśli

    (a) $V = \text{lin}((1, 1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$,
    (b) $V = \text{lin}((1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (3, 3, -1, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$,
    (c) $V = \text{lin}((0, 1, 2, 1), (2, 1, -6, -1)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

14. Znaleźć bazę

    (a) $V^\perp$, jeśli $V \subseteq \mathbb{R}^3$ opisane jest równaniem $x + 2y - z = 0$.
    (b) $V \subseteq \mathbb{R}^5$, jeśli $V^\perp$ opisane jest układem równań $\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x + y - w = 0 \end{cases}$

15. Znaleźć układ równań opisujący V, jeśli

$$V^\perp = \text{lin}((1, 1, 0), (2, 1, -1)).$$

Bibliografia

1. *Algebra liniowa 1*, T. Jurlewicz, Z. Skoczylas