

ĆWICZENIA

działania na liczbach zespolonych, sprzężenie, moduł, postać trygonometryczna, wzór de Moivre'a

(wersja: 23 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Działania na liczbach zespolonych;
2. Sprzężenie liczby zespolonej;
3. Rozwiązywanie równań w zbiorze liczb zespolonych;
4. Zaznaczanie zbioru liczb zespolonych na płaszczyźnie zespolonej;
5. Obliczanie modułu liczby zespolonej;
6. Zaznaczanie na płaszczyźnie zespolonej modułu różnicy liczb zespolonych;
7. Zapisywanie liczb w postaci trygonometrycznej;
8. Zaznaczanie na płaszczyźnie zespolonej zbiorów liczb zespolonych, których argument spełnia podany warunek;
9. Obliczanie potęg liczb zespolonych przy wykorzystaniu wzoru de Moivre'a;
10. Rozwiązywanie równań przy wykorzystaniu postaci wykładniczej liczby zespolonej;
11. Obliczanie pierwiastków liczb zespolonych bez wykorzystania postaci trygonometrycznej;
12. Obliczanie i zaznaczanie na płaszczyźnie zespolonej pierwiastków liczb;

Zadania

1. Wykonać podane działania:
 - (a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$,
 - (b) $(4i - 3) - (1 + 10i)$,
 - (c) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i)$,

(d) $\frac{2-3i}{5+4i}$.

2. Znaleźć liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$(x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i.$$

3. Rozwiązać podane równania w zbiorze liczb zespolonych:

(a) $z^2 + 3\bar{z} = 0,$

(b) $2z + (1 + i)\bar{z} = 1 - 3i.$

4. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

(a) $\text{Im} [(1 + 2i)z - 3i] < 0,$

(b) $\text{Re} (z - i)^2 \geq 0.$

5. Wykonać podane działania dla $z = 5 - 2i, w = 3 + 4i$:

(a) $z \cdot \bar{w},$

(b) $\frac{z^2}{w},$

(c) $\frac{z-w}{\bar{z}+\bar{w}},$

(d) $\frac{\text{Re } z + i \text{Im } w}{z+w}.$

6. Znaleźć liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające podane równanie:

(a) $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i,$

(b) $(2 + yi) \cdot (x - 3i) = 7 - i.$

7. Rozwiązać podane równania w zbiorze liczb zespolonych:

(a) $z^2 = 4\bar{z},$

(b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}.$

8. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

(a) $\text{Re} (iz + 2) \geq 0,$

(b) $\text{Im } z^2 < 0.$

9. Obliczyć moduł podanych liczb zespolonych:

(a) $12i - 5,$

(b) $\sqrt{7} + \sqrt{29}i,$

(c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3})i.$

10. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1 i z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 płaszczyzny zespolonej. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

(a) $|z + 1 - 2i| = 3,$

(b) $2 \leq |z + i| < 4,$

(c) $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1.$

11. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

- (a) $-\sqrt{5}$,
- (b) $-6 - 6i$,
- (c) $-2i$,
- (d) $\sqrt{3} + i$.

12. Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

- (a) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$,
- (b) $\arg(z + 2 - i) = \pi$.

13. Obliczyć wartości podanych wyrażeń korzystając ze wzoru de Moivre'a:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

(wynik podać w postaci algebraicznej):

- (a) $(1 + i)^7$,
- (b) $(\sqrt{3} - i)^{32}$,
- (c) $(-2 + 2i)^8$.

14. Rozwiązać równanie

$$(\bar{z})^6 = 4|z^2|$$

stosując postać wykładniczą liczby zespolonej $z = re^{i\varphi}$.

15. Obliczyć pierwiastek kwadratowy bez zamiany na postać trygonometryczną $\sqrt{3 + 4i}$.

16. Korzystając ze wzoru na pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$ o argumentie φ :

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\text{dla } k = 0, 1, \dots, n - 1$$

obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

- (a) $\sqrt{-2i}$,
- (b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$.

17. Obliczyć moduł podanych liczb zespolonych:

- (a) $-\sqrt{3}i$,
- (b) $6 - 8i$,
- (c) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}i$.

18. Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

- (a) $|z - 3 + 4i| = 1$,
- (b) $\left| \frac{z-2i}{z+1} \right| = 1$,
- (c) $2 \leq |iz - 5| < 3$.

19. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) $7 + 7i$,

(b) $\sqrt{3} - i$,

(c) $-5 + 5\sqrt{3}i$.

20. Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

(a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$,

(b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \frac{\pi}{3}$.

21. Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

(a) $(1 - i)^{12}$,

(b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$,

(c) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$.

22. Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać podane równania:

(a) $z^7 = \bar{z}$,

(b) $\overline{(z^4)} = z^2 |z^2|$.

23. Obliczyć pierwiastki kwadratowe bez zamiany na postać trygonometryczną:

(a) $\sqrt{3 - 4i}$,

(b) $\sqrt{8 + 6i}$.

24. Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

(a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$,

(b) $\sqrt[3]{-27i}$,

(c) $\sqrt[4]{-4}$,

(d) $\sqrt[6]{-64}$.

Bibliografia

1. *Algebra liniowa* T. Skoczylas, Z. Jurlewicz