Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

macierz odwrotna, równania macierzowe

(wersja: 6 listopada 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie macierzy odwrotnej do macierzy A z definicji: $A \cdot A^{-1} = I$;
2. Obliczanie macierzy odwrotnej do macierzy A poprzez dopisanie z prawej strony macierzy identycznościowej;
3. Obliczanie macierzy odwrotnej do A za pomocą wzoru $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T$, gdzie A^D jest macierzą dopełnień algebraicznych:
$$A^D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix},$$
$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ oraz A_{ij} jest podmacierzą powstałą z A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny;

Zadania

1. Znaleźć macierz odwrotną korzystając z definicji $M \cdot M^{-1} = I$ dla macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, (d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, (e) $E = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, (f) $F = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, (g) $G = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, (d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$,

(e) $E = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$,

(f) $F = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

stosując metodę dopisania z prawej strony macierzy identycznościowej.

3. Wyznaczyć macierze odwrotne do macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

stosując wzór $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T$, gdzie A^D jest macierzą dopełnień algebraicznych:

$$A^D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix},$$

$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ oraz A_{ij} jest podmacierzą powstałą z A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

4. Rozwiązać równania macierzowe.

a) $X = 3A - 4B$,

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

b) $2X + 4A = 3BA$,

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $AXB^T = C$,

$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $X = A^T A - 2A$,

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

j) $X = A^3$,

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

k) $A^T XB = C$,

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

d) $XA = B,$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

e) $X = 2(AB + C),$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

f) $X = A + 3B,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

g) $XA = B,$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) $AX = B,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

l) $X = AA^T - 2AB,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

m) $X = ABC,$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

n) $A^T X = B,$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

o) $XA = B,$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

p) $AX = B,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$