Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

macierz przekształcenia liniowego w bazach standardowych i dowolnych, pojęcie endomorfizmu, współrzędne wektora w bazie

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Znajdowanie macierzy przekształcenia liniowego w bazach standardowych i dowolnych, w szczególności
$$M(\varphi)_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{st} M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}};$$

2. Znajomość pojęcia endomorfizmu;

3. Znajdowanie współrzędnych wektora w bazie poprzez mnożenie macierzy przekształcenia liniowego przez wektor;

4. Znajdowanie macierzy złożenia przekształceń liniowych jako iloczynu macierzy poszczególnych przekształceń;

5. Znajdowanie wzoru na przekształcenie liniowe (złożenie przekształceń) na podstawie jego macierzy;

Zadania

1. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego φ w bazach standardowych oraz w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:

   (a) $\mathcal{A} = \{(3,4,1),(2,3,1),(5,1,1)\}$,
   $\mathcal{B} = \{(3,1),(2,1)\}$
   $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 8x_3)$

   (b) $\mathcal{A} = \{(3,1),(4,2)\}$,
   $\mathcal{B} = \{(1,0,1,0),(0,1,1,1),(0,1,2,3),(0,0,0,1)\}$
   $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \varphi(x,y) = (3x+y, x+5y, -x+4y, 2x+y)$

2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(3,1,1),(1,0,0),(5,1,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(3,4,5),(4,1,1),(2,0,1)\}$ macierz
$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Znaleźć wzór na φ.

3. Niech $\varphi : V \to W, \psi : W \to Z$ będą przekształceniami liniowymi i niech

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

oraz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

w pewnych bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ przestrzeni V, W, Z odpowiednio. Niech $\alpha \in V$ ma współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ równe $1, -1, 3, -2$. Znaleźć

(a) współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$,

(b) współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C}$,

(c) macierz $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

4. Niech będą dane przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ oraz $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że:

$$M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\phi((x, y, z)) = (2z, x + y)$$

oraz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathcal{A} = \{(4, -3), (-5, 4)\}$ i $\mathcal{C} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ są bazami $\mathbb{R}^2$, zaś $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 1)\}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$. Znajdź:

(a) współrzędne wektora $\psi(v)$ w bazie $\mathcal{C}$ dla wektora $v = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$,

(b) $M(\phi)_{st}^{st}$,

(c) $M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}}$,

(d) $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{st}$,

(e) wzór przekształcenia $3\psi + \phi \circ \varphi$.

5. Znaleźć macierz endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi((x, y, z)) = (4x + y + z, 3x + 2y + z, 3x + 2y + z)$$

w bazach standardowych oraz w bazach

$$\mathcal{A} = \{(3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0)\},$$

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (4, 1, 1), (2, 0, 1)\}.$$

6. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(-1,-1),(2,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,-1,-1),(4,3,2)\}$ macierz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wzór na φ.

7. Niech $\mathcal{A} = \{(0,1,0),(1,2,3),(5,7,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(2,1),(1,0)\}$ oraz niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierz w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ wynosi

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym zadanym wzorem $\psi((y_1,y_2)) = (y_1 - y_2, y_1 + y_2)$. Znaleźć:

(a) $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$,

(b) wzór na $\psi \circ \varphi$.

8. Niech $\mathcal{A} = \{(-1,1),(0,-1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,0,1,1),(-1,0,0,1),(0,2,0,1),(0,0,1,-$ oraz niech $\phi, \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będą zadane tak, że:

(a) $\varphi((x,y)) = (y, x+y, -2x)$,

(b) $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(c) $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Oblicz:

(a) współrzędne wektora $\psi(v)$ w bazie $\mathcal{C}$, jeśli wektor v ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $1,1,1$,

(b) $M(\varphi)_{st}^{st}$,

(c) $M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{B}}$,

(d) $M(2\psi \circ (\varphi + \phi))_{st}^{st}$,

(e) wzór przekształcenia $2\psi \circ (\varphi + \phi)$.

Bibliografia

1. *Wykłady z algebry liniowej (skrypt)*, T. Koźniewski