Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

ortogonalizacja Grama-Schmidta, znajdowanie bazy ortogonalnej, uzupełnianie układu wektorów do bazy ortogonalnej przestrzeni

(wersja: 20 lutego 2021)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Znajdowanie bazy ortogonalnej podprzestrzeni metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta;
2. Uzupełnianie układu wektorów do bazy ortogonalnej przestrzeni;

Zadania

1. Znaleźć bazę ortogonalną i bazę ortonormalną przestrzeni $V = \text{lin}((1,0,1,0),(0,1,-1,1),(0,0,0,1))$.
2. Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni
   $W = \text{lin}((1,1,2,1),(2,3,1,3),(3,5,0,5))$
   oraz bazę ortonormalną przestrzeni V, będącej przestrzenią rozwiązań układu równań
   $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$
3. Stosując metodę Grama-Schmidta zortogonalizować podane wektory ze wskazanych przestrzeni euklidesowych:
   (a) $\vec{u}_1 = (1,-2,0)$, $\vec{u}_2 = (5,5,1)$, $\vec{u}_3 = (5,4,4)$ w przestrzeni E^3,
   (b) $\vec{u}_1 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,2,2,0)$, $\vec{u}_3 = (0,1,0,1)$ w przestrzeni E^4.
4. Podane wektory uzupełnić do baz ortogonalnych odpowiednich przestrzeni euklidesowych:
   (a) $(1,4,-2)$, $(2,-1,-1)$ w przestrzeni E^3,
   (b) $(1,1,1,0)$, $(0,1,-1,1)$ w przestrzeni E^4.
5. Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni
   $V = \text{lin}((1,1,0,0,0),(0,2,1,0,0),(-1,0,-1,1,1))$
   oraz bazę ortogonalną przestrzeni $V^{\perp}$. Znaleźć odpowiednie bazy ortonormalne.
6. Znaleźć bazy ortonormalne przestrzeni

(a) $V = \mathrm{lin}((1,0,1,0),(0,1,0,2),(2,-2,2,-4)) \subset \mathbb{R}^4$
oraz
$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

(b) $V^\perp$ oraz $W^\perp$, jeśli
$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$,
$W = \mathrm{lin}((1,0,-1,2),(1,1,1,1)) \subset \mathbb{R}^4$.

7. Stosując metodę Grama-Schmidta zortogonalizować podane wektory ze wskazanych przestrzeni euklidesowych:

   (a) $(2,1,3)$, $(1,6,2)$ w przestrzeni E^3,

   (b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ w przestrzeni R^3 z iloczynem skalarnym wektorów $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3)$ zdefiniowanym wzorem

$$(\vec{x},\vec{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

   (c) $(4,3,2,1)$, $(4,3,2,0)$, $(4,3,0,0)$ w przestrzeni E^4,

   (d) $(0,1,1,0)$, $(-2,0,2,0)$, $(3,1,1,1)$ w przestrzeni E^4.

8. Znaleźć bazy ortogonalne danych przestrzeni euklidesowych zawierające wskazane wektory:

   (a) $(1,-1,2)$ w przestrzeni E^3,

   (b) $(1,1,1,1)$ w przestrzeni E^4,

   (c) $(1,0,1,1)$, $(0,1,1,-1)$ w przestrzeni E^4,

   (d) $(1,0,3,-2)$, $(-1,0,1,1)$, $(5,0,1,4)$ w przestrzeni E^4.

9. Wyznaczyć bazy ortonormalne wskazanych przestrzeni euklidesowych i znaleźć współrzędne podanych wektorów w tych bazach:

   (a) $V = \mathrm{lin}\{(1,0,-1,0),(0,1,1,-1)\}$, $\vec{u} = (3,1,2,1) \in E^4$

   (b) $V = \mathrm{lin}\{(1,1,1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,-1)\}$, $\vec{u} = (-1,0,10,-1) \in E^4$

   (c) $V = \{(x,y,z,t) \in E^4 : x + y + z = 0, y = t\}$, $\vec{u} = (-1,3,-2,3) \in E^4$

Bibliografia

1. *Algebra liniowa 1*, T. Jurlewicz, Z. Skoczylas