Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

przekształcenia liniowe

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Sprawdzanie, czy odwzorowanie jest przekształceniem liniowym.
2. Znajdowanie wzoru na przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ zadane wartościami obliczonymi dla wektorów bazy przestrzeni V.

Zadania

1. Które z poniższych odwzorowań $\varphi : V \to W$ są przekształceniami liniowymi?
   (a) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y,z)) = (x+3y-1, 4x+2y+6)$,
   (b) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y,z)) = (x+3y-z, 4x+2y+6z)$,
   (c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y,z)) = (x+3y-z, 4|x|+2|y|+6|z|)$.
2. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem
   $$\varphi((a,b)) = \big(a+b+(t^2-9)ab, 5a+3(b-1)+t\big)$$
   jest przekształceniem liniowym?
3. Znaleźć wzory na przekształcenia liniowe zadane podanymi warunkami:
   (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
   $\varphi((1,0,1)) = (5,1,3)$,
   $\varphi((0,1,1)) = (2,3,4)$,
   $\varphi((1,0,0)) = (6,7,7)$,
   (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
   $\varphi((3,1)) = (4,5,-1)$,
   $\varphi((7,2)) = (-3,0,5)$.

4. Niech $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będą przekształceniami liniowymi zadanymi następująco:
$\varphi((1,1,1)) = (3,7)$,
$\varphi((1,1,0)) = (2,5)$,
$\varphi((1,0,0)) = (1,6)$
oraz
$\psi((2,2,1)) = (3,3)$,
$\psi((2,1,0)) = (5,0)$,
$\psi((2,1,1)) = (4,2)$.
Znaleźć wzory na przekształcenie $\varphi + \psi$ oraz na przekształcenie 5φ.

5. Które z poniższych odwzorowań $\varphi : V \to W$ są przekształceniami liniowymi?

   (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi((x,y)) = (2x+6y, 4x+2y, x+y, 3x)$,

   (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y,z)) = ((x+2)^2 - x^2 - z - 4, 4x+2y+6z)$.

6. Niech $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będą przekształceniami liniowymi zadanymi następująco:
$\varphi((2,2,1)) = (19,12)$,
$\varphi((1,1,0)) = (10,0)$,
$\varphi((1,0,0)) = (3,1)$
oraz
$\psi((-1,1,0)) = (4,1)$,
$\psi((-1,2,1)) = (5,11)$,
$\psi((0,0,1)) = (3,9)$.
Znaleźć wzór na przekształcenie $\varphi + 3\psi$.

7. Sprawdzić, czy przekształcenia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są liniowe:

   (a) $\psi(x) = (2x+1, 0)$,

   (b) $\varphi(x,y) = -x + 2y$.

8. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane następująco:

$$\varphi((1,-1)) = (1,2,1), \qquad \varphi((-1,0)) = (-1,0,1).$$

Znaleźć wzór na φ.

Bibliografia

1. *Wykłady z algebry liniowej (skrypt)*, T. Koźniewski