

8. Dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ wektor $(1, 1, c)$ jest kombinacją liniową wektorów $(2, 1, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(3, 0, 2)$, $(2, -2, -2)$?
9. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ wektorów $(0, 1, 2, a)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(2, 1, 4, 1)$ jest liniowo niezależny?
10. Czy układ wektorów $(2, 6, -6, -3)$, $(5, 9, -3, 3)$, $(1, 1, 1, 2)$ jest liniowo niezależny?
11. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $\text{lin}((2, 1, 3), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 5))$.
12. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni opisanej następującym układem równań

$$\begin{cases} 3x + y + z - 4t = 0 \\ 7x + 3y + 5z + 2t = 0 \\ 2x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

13. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozpiętej przez wektory $(3, 2, 1, 1)$, $(5, 0, 2, 3)$, $(4, 1, 4, 5)$, $(4, 1, -1, -1)$, a następnie opisać tę przestrzeń układem równań.
14. Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ podprzestrzeń $\text{lin}\{(1, 2, 1), (2, 5, 3), (1, 3, t)\}$ daje się opisać jednym niezerowym równaniem? Znaleźć to równanie.
15. Znaleźć współrzędne wektora $(1, 8, 10, 10)$ w bazie $(1, 2, 3, 1)$, $(2, 1, 3, 3)$, $(-1, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, 2)$.
16. Niech V będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x - y + z - t + w = 0 \end{cases}$$

Uzupełnić, o ile to możliwe, układ wektorów $(5, -1, 2, 1, 7)$, $(2, 3, -6, -3, 4)$ do bazy całej przestrzeni \mathbb{R}^5 wektorami należącymi do V .

17. Rozpatrzmy następujące wektory przestrzeni \mathbb{R}^3 : $\alpha_1 = (3, 2, 1)$, $\alpha_2 = (7, 3, 1)$, $\alpha_3 = (4, 2, 1)$, $\beta_1 = (0, 2, 1)$, $\beta_2 = (1, 1, 2)$, $\beta_3 = (1, 0, 0)$.
- (a) wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^3 i znaleźć współrzędne wektorów $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ w tej bazie;
- (b) podać przykład takiej bazy, że wektor β_1 ma w niej współrzędne $1, 1, 0$, a wektor β_2 współrzędne $0, 0, 1$.

18. Znaleźć współrzędne wektora $(5, 0, 0)$ w bazie zadanej wektorami $(1, 2, -1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$.

19. Niech W będzie podprzestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Znajdź bazę przestrzeni W i uzupełnij ją do bazy przestrzeni \mathbb{R}^5 .

20. Niech bazą przestrzeni V będzie $(1, -1, 1, 1, -2)$, $(4, 4, -4, -4, 0)$, $(3, 1, 3, -1, 3)$, zaś $W = \text{lin}\{(-1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\}$. Uzupełnić bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni \mathbb{R}^5 korzystając z wektorów z W .
21. Podać przykład takiej bazy przestrzeni \mathbb{R}^3 , że wektor $(1, 2, 3)$ ma w niej współrzędne $3, 1, 2$.

Bibliografia

1. *Algebra liniowa (skrypt)* T. Koźniewski