Zofia Zielińska-Kolasińska **Algebra liniowa – rzuty i symetrie prostopadłe, przestrzenie afiniczne**
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

rzuty i symetrie prostopadłe w przestrzeniach liniowych, przestrzenie afiniczne

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Znajdowanie rzutu wektora na podprzestrzeń liniową;
2. Znajdowanie współrzędnych w bazie ortonormalnej;
3. Znajdowanie symetrii wektora względem podprzestrzeni liniowej;
4. Znajdowanie wzoru na przekształcenie liniowe będące rzutem lub symetrią względem podprzestrzeni liniowej;
5. Znajdowanie przestrzeni stycznej i wektora przesunięcia z punktów, przez które przechodzi podprzestrzeń afiniczna;
6. Znajdowanie parametryzacji przestrzeni afinicznej, mając daną przestrzeń styczną i wektor przesunięcia;
7. Znajdowanie przestrzeni afinicznej prostopadłej do danej przestrzeni i przechodzącej przez dany punkt;
8. Znajdowanie rzutu punktu lub obrazu w symetrii względem podprzestrzeni afinicznej;

Zadania

1. Znaleźć rzut wektora $v = (1, 0, 1)$ na prostą $\text{lin}\{(1, 2, 3)\}$ i płaszczyznę opisaną równaniem $x + 2y + 3z = 0$. Znaleźć obraz symetryczny v względem tej płaszczyzny.

   Wskazówka 1: rzut na płaszczyznę znaleźć na dwa sposoby:
   I: suma rzutów na wektory bazy ortogonalnej przestrzeni W;
   II: zauważyć, że w $\mathbb{R}^3$ podprzestrzeń prostopadła do podprzestrzeni dwuwymiarowej jest prostą oraz z faktu, że wektor v jest sumą swoich rzutów na W i $W^\perp$, a zatem rzut na W jest różnicą wektora v i jego rzutu na $W^\perp$.

   Wskazówka 2: skorzystać z tego, że obraz v' wektora v w symetrii prostopadłej względem V, to $v' = 2r - v$, gdzie r jest rzutem wektora na podprzestrzeń.

2. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć rzut prostopadły wektora $\alpha = (1,1,1)$ na płaszczyznę $V = \{(x,y,z) : x + 2y - z = 0\}$ oraz rzut prostopadły tego wektora na prostą $\text{lin}\{(1,2,3)\}$. Znaleźć obraz wektora α w symetriach prostopadłych względem powyższej płaszczyzny i prostej.

3. Niech $V = \text{lin}\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe

   (a) ϕ będące rzutem prostopadłym na przestrzeń V,

   (b) ψ będące symetrią prostpadłą względem V.

4. W $\mathbb{R}^4$ znaleźć wzór na przekształcenie liniowe będące rzutem prostopadłym na przestrzeń $W = \text{lin}\{(2,1,0,1),(1,0,0,1)\}$ oraz na przekształcenie będące symetrią względem W.

5. Podać trzy punkty, przez które przechodzi warstwa

$$H = (1,0,0,-1) + \text{lin}\{(1,-1,0,1),(2,-1,1,0)\}.$$

   W drugą stronę: dane są trzy punkty $(1,0,0,-1)$, $(2,-1,0,0)$, $(3,-1,1,-1)$, podać przestrzeń styczną oraz wektor translacji podprzestrzeni afinicznej.

6. Podać parametryzację warstwy

$$H = (1,0,0,-1) + \text{lin}\{(1,-1,0,1),(2,-1,1,)\}.$$

   W drugą stronę: mając dane, że

$$H = \{(1 + t + 2s, -1 - s, s, -1 + t) : s,t \in \mathbb{R}\}$$

   podać przestrzeń styczną i wektor translacji tej płaszczyzny.

7. Znaleźć parametryzację:

   (a) prostej $L \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkty $(1,1,5)$, $(3,2,4)$,

   (b) płaszczyzny $P \subseteq \mathbb{R}^3$ opisanej równaniem $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$,

   (c) hiperpłaszczyzny $\subseteq \mathbb{R}^4$ opisanej równaniem $x + y - 3z + 2t = 5$.

8. Znaleźć układ równań opisujący płaszczyznę

$$H = (1,0,0,-1) + \text{lin}\{(1,-1,0,1),(2,-1,1,0)\}.$$

9. Znaleźć parametryzację przestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^3$ opisanej równaniem $x + y - 2z = 3$.

10. Dla wektora $v = (1,0,1,0)$ znaleźć rzut na podprzestrzeń oraz obraz w symetrii względem podprzestrzeni, gdy tą podprzestrzenią jest

    (a) prosta $\text{lin}\{(1,1,1,1)\}$,

    (b) hiperpłaszczyzna opisana równaniem $x + y + z + t = 0$,

    (c) płaszyczyna $\text{lin}\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}$.

    oraz wzory na przekształcenia liniowe ϕ, ψ będące odpowiednio rzutem i symetrią względem powyższych podprzestrzeni.

11. Podać trzy punkty, przez które przechodzi płaszczyzna $(1,0,1) + \text{lin}\{(1,2,2),(-3,2,1)\}$. Znaleźć parametryzację tej płaszczyzny i układ równań ją opisujący.

12. Podać przestrzeń styczną oraz wektor translacji hiperpłaszczyzny przechodzącej przez punkty $(1,2,3,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,-2,1,0)$, $(1,1,0,-1)$. Znaleźć parametryzację tej hiperpłaszczyzny i układ równań ją opisujący.

13. Znaleźć wektor przesunięcia i przestrzeń styczną płaszczyzny $\{(1-x+2y, x-y, 5+2x-3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Znaleźć układ równań opisujący tę płaszczyznę.

14. Znaleźć parametryzacje następujących przestrzeni afinicznych $M \subseteq \mathbb{R}^4$:

    (a) opisanej układem równań

    $$x + y - z + 2t = 12x - 2y - z = -2,$$

    (b) opisanej równaniem $x + y + z + t = 1$.

15. Znaleźć układ równań opisujący płaszczyznę M przechodzącą przez punkt $(1,2,-1)$ i prostopadłą do prostej $L = (2020,0,0) + \mathrm{lin}\{(1,1,1)\}$.

16. Znaleźć rzut punktu $(2,2,1)$ ma prostą $(2,1,0) + \mathrm{lin}\{(-1,-1,0\}$.

17. Znaleźć układ równań i parametryzację

    (a) prostej L przechodzącej przez $(1,0,0,0)$ i prostopadłej do hiperpłaszczyzny

    $$H = \{(1 + x - y + z, 2x + z, y - 3x, -1) : x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

    (b) płaszczyzny M przechodzącej przez $(1,-1,1,-1)$ i prostopadłej do płaszyczyny opisanej układem równań:
    $$\begin{cases} x + 3y + t = 0 \\ 2x + 7y - z - t = 0. \end{cases}$$

18. Znaleźć rzut wektora $(1,0,1,0)$ na podane podprzestrzenie afiniczne. Znaleźć jego obraz w symetrii względem tych podprzestrzeni.

    (a) Prosta $(1,0,-1,0) + \mathrm{lin}\{(1,1,1,1)\}$;

    (b) Hiperpłaszczyzna opisana równaniem

    $$H : x + y + z + t = -3;$$

    (c) Płaszczyzna $af\{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,1,1,1)\}$.

Bibliografia

1. *Wykłady z algebry liniowej (skrypt)*, T. Koźniewski