Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

układy równań liniowych, układy jednorodne i niejednorodne, wzory Cramera, metoda eliminacji Gaussa

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Wyznaczanie minorów stopnia 1. oraz obliczanie minorów wyższych stopni;
2. Sprowadzanie macierzy do postaci schodkowej za pomocą elementarnych operacji na wierszach, w celu wyznaczenia jej rzędu;
3. Znajomość pojęć dotyczących układów równań: (nie)jednorodny, (nie)sprzeczny, (nie)oznaczony, układ Cramera;
4. Znajdowanie rozwiązania układu równań metodą eliminacji Gaussa;
5. Znajdowanie rozwiązania układu równań metodą Cramera;
6. Znajdowanie rozwiązania ogólnego układu równań i zapisywanie go w postaci parametrycznej;
7. Sprawdzanie dla jakiej wartości parametru podany ciąg jest rozwiązaniem układu równań;

Zadania

1. Dla macierzy
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
określić, czym są minory stopnia 1. oraz obliczyć przykładowe minory stopnia 2. Ile jest minorów stopnia 4.? Wskazać ten minor.
2. Wyznaczyć rzędy macierzy metodą znajdowania niezerowych minorów

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Pamiętając, że operacje elementarne na wierszach macierzy nie zmianiają jej rzędu, sprowadzić macierz do postaci schodkowej i wyznaczyć jej rząd

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Który z następujących układów

(a) jest jednorodny,

(b) jest sprzeczny,

(c) jest układem Cramera,

(d) ma jednoznaczne rozwiązanie (jest oznaczony)?

Znaleźć rozwiązanie ogólne, o ile istnieje, stosując metodę eliminacji Gaussa lub wzory Cramera (tam, gdzie to możliwe) i zapisać je w formie sparametryzowanej.

(a) $U_0 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5$,

(b) $U_1^a : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$

(c) $U_1^b : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 = -2 \end{cases}$

(d) $U_1^c : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 = 13 \end{cases}$

(e) $U_1^d : \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 9 \end{cases}$

(f) $U_1^e : \begin{cases} x_1 - 7x_2 = 6 \\ -x_1 + 5x_2 = -2 \end{cases}$

(g) $U_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

(h) $U_3^a : \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 9x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

(i) $U_3^b : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$

(j) $U_3^c : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$

(k) $U_3^d : \begin{cases} 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

(l) $U_4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -4 \end{cases}$

5. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ ciąg $(1, t, 3, 2t)$ jest rozwiązaniem poniższego układu równań?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$$

6. Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ ciąg $(t^2, -1, 1, -t^2, 1)$ jest rozwiązaniem poniższego układu równań?

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -1 \\ 9x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 11x_5 = 1 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

7. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ poniższy układ równań jest niesprzeczny?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = s \end{cases}$$

8. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ poniższy układ jest sprzeczny?

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ -4x_1 - 2sx_2 + 4sx_3 = -4 \end{cases}$$

9. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań i zapisać je w postaci parametrycznej.

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2w + 3t = 1 \\ 3x + 2y + 4z + w + 2t = 3 \\ 3x + 2y - 2z + w = -7 \\ 9x + 6y + z + 3w + 2t = 2 \end{cases}$$

10. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższego układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 8 \end{cases}$$

11. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższego układu równań:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c + 4d + 3e = 1 \\ 5a + 8b + 2c + 5d + 8e = 4 \\ 4a - 2b + c + 7d + e = 2 \end{cases}$$

12. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_3$. Czy ciąg $(1, 1, 1, 1)$ jest rozwiązaniem tego układu?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

13. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_5$. Czy ciąg $(1, 1, 1, 1)$ jest rozwiązaniem tego układu?

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

14. Rozwiązać w ciele $\mathbb{Z}_7$ układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$