**Zofia Zielińska-Kolasińska**
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach



UNIWERSYTET PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

# ĆWICZENIA

podobieństwo macierzy, wektory i wartości własne, diagonalizacja

(wersja: 22 października 2020)

---

**Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.**

## Zakres materiału

1. Znajdowanie wartości własnych;
2. Znajdowanie baz przestrzeni własnych;
3. Znajdowanie bazy własnej, o ile istnieje;
4. Podobieństwo macierzy
5. Sprawdzanie, czy macierze są diagonalizowalne;
6. Obliczanie potęgi macierzy przy pomocy macierzy diagonalnej;

## Zadania

1. Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych im odpowiadających dla następujących przekształceń liniowych:
   (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi((x,y,z)) = (2x, x+y, -x+z)$,
   (b) $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \Psi((x,y,z)) = (x+2y, 3x+4y, 5z)$,
2. Sprawdzić, czy istnieją bazy całej przestrzeni złożone z wektorów własnych (tj. bazy własne), a jeśli tak, podać macierz przekształcenia w takiej bazie, dla przekształceń:
   (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi((x,y,z)) = (2x, x+y, -x+z)$,
   (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \varphi((x,y)) = (x-y, x+3y)$,
3. Dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y)) = (3x+4y, 5x-2y)$ oraz baz $\mathcal{A}_1 = \{(4,1),(3,1)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(2,3),(5,8)\}$, $\mathcal{A}_3 = \{(4,2),(1,1)\}$ znaleźć macierze $A_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ oraz macierze $C_{ij}$ spełniające $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ dla $i,j = 1$ (przypadki $i,j = 2,3$ stanowią pracę domową).
4. Sprawdzić, czy poniższe macierze $M$ są diagonalizowalne, a jeśli tak, podać macierze $C$ i $D$, takie, że $D$ jest diagonalna, oraz $M = C \cdot B \cdot C^{-1}$.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

5. Obliczyć:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5$

6. Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych im odpowiadających dla następujących przekształceń liniowych:

   (a) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \psi((a,b)) = (3a+b, 5b)$,

   (b) $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \Phi((x,y,z,t)) = (-y, x, 2z-t, -z+2t)$.

7. Sprawdzić, czy istnieją bazy całej przestrzeni złożone z wektorów własnych (tj. bazy własne), a jeśli tak, podać macierz przekształcenia w takiej bazie, dla przekształceń:

   (a) $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \Psi((x,y,z)) = (x+2y, 3x+4y, 5z)$,

   (b) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \psi((a,b)) = (3a+b, 5b)$,

   (c) $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \Phi((x,y,z,t)) = (-y, x, 2z-t, -z+2t)$.

8. Dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y)) = (3x+4y, 5x-2y)$ oraz baz $\mathcal{A}_1 = \{(4,1),(3,1)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(2,3),(5,8)\}$, $\mathcal{A}_3 = \{(4,2),(1,1)\}$ znaleźć macierze $A_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ oraz macierze $C_{ij}$ spełniające $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ dla $i,j = 2,3$.

9. Sprawdzić, czy poniższe macierze $M$ są diagonalizowalne, a jeśli tak, podać macierze $C$ i $D$, takie, że $D$ jest diagonalna, oraz $M = C \cdot B \cdot C^{-1}$.

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Obliczyć:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{2020}$

## Bibliografia


1. *Wykłady z algebry liniowej (skrypt)*, T. Koźniewski