Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej, całka nieoznaczona, pojęcie funkcji pierwotnej, podstawowe wzory i metody całkowania

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia:
   (a) funkcja pierwotna,
   (b) całka nieoznaczona,
   (c) całkowanie,
   (d) funkcja całkowalna.
2. Podstawowe wzory rachunku całkowego,
3. Własności całek nieoznaczonych
   (a) addytywność całki względem funkcji podcałkowej,
   (b) wynoszenie stałego czynnika przed znak całki,
   (c) całkowanie przez części,
   (d) całkowanie przez zamianę zmiennych (przez podstawienie).

Oznaczenia, terminologia i twierdzenia

1. **Funkcja pierwotna** *Funkcją pierwotną* funkcji $f(x)$ w przedziale $a < x < b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się danej funkcji $f(x)$ dla każdego x z przedziału $a < x < b$.
2. Dwie funkcje mające w danym przedziale tę samą skończoną pochodną mogą się różnić co najwyżej o stałą.
3. **Całka nieoznaczona** *Całką nieoznaczoną* funkcji $f(x)$, oznaczaną symbolem
$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$
nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a C jest dowolną stałą. Jest więc
$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \text{ gdzie } F'(x) = f(x).$$

4. **Podstawowe wzory rachunku całkowego**

   (a) $\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq -1, x > 0.$

      i. Gdy $a \in \mathbb{N}$, to zastrzeżenie $x > 0$ odpada.

      ii. Gdy $a \in \mathbb{Z}_-$, to zamiast $x > 0$ wystarczy założyć $x \neq 0$.

   (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$,,

   (c) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C,$

   (d) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0, a \neq 1,$

   (e) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C,$

   (f) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C,$

   (g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \cos x \neq 0,$

   (h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \sin x \neq 0,$

   (i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C', \qquad -1 < x < 1,$

   (j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C'.$

5. **Całkowanie** Wyszukiwanie całki nieoznaczonej danej funkcji nazywamy *całkowaniem*.

6. **Funkcja całkowalna** Funkcję, która posiada w pewnym przedziale całkę nieoznaczoną, nazywamy *całkowalną*.

7. Każda funkcja ciągła w przedziale posiada w nim całkę.

8. **Własności całek nieoznaczonych**

   (a) **Addytywność całki względem funkcji podcałkowej** Całka sumy równa się sumie całek, tzn.

   $$\int \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

   (b) Stały czynnik wolno wynieść przed znak całki, tzn.

   $$\int k f(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \qquad k \neq 0.$$

   (c) Jeżeli $f(x) \neq 0$ i posiada pochodną w pewnym przedziale, to otrzymujemy wzór

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

   (d) **Całkowanie przez zamianę zmiennej (przez podstawienie)** Jeżeli dla $a \leq x \leq b$, $g(x) = u$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz $A \leq g(x) \leq B$, a funkcja $f(u)$ jest ciągła w przedziale $[A; B]$, to

   $$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u,$$

   przy czym po scałkowaniu prawej storny należy w otrzymanym wyniku podstawić $u = g(x)$.

   (e) **Całkowanie przez części** Jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to

   $$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

(f) Reguła całkowania przez części ma mniejsze zastosowanie niż całkowanie przez podstawienie. Istnieją jednak klasy całek, na przykład

$$\int x^k \ln^m x \mathrm{d}x, \quad \int x^k \sin bx \mathrm{d}x, \quad \int x^k \cos bx \mathrm{d}x, \quad \int x^k e^{ax} \mathrm{d}x$$

i inne, które obliczamy właśnie za pomocą całkowania przez części.

Pomocne wzory

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
3. $\cos p + \cos s = 2 \cos \frac{p+s}{2} \cos \frac{p-s}{2}$,
4. $\cos p - \cos s = -2 \sin \frac{p+s}{2} \sin \frac{p-s}{2}$.

Zadania

1. Obliczyć całki

   (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5}$,
   (b) $\int x \sqrt[3]{x} \mathrm{d}x$,
   (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x}}$,
   (d) $\int (3x^5 - 4x^3 + 2) \mathrm{d}x$,
   (e) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2} \mathrm{d}x$,
   (f) $\int (2\sqrt{x} + 3x) \sqrt[3]{x} \mathrm{d}x$,
   (g) $\int (1 - \sqrt{x})^2 \mathrm{d}x$,
   (h) $\int (-5 \sin x + 3 \cos x + 1) \mathrm{d}x$,
   (i) $\int (2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x) \mathrm{d}x$,
   (j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$,
   (k) $\int \frac{5}{2x-3} \mathrm{d}x$,
   (l) $\int \frac{x^2}{x^3+1} \mathrm{d}x$,
   (m) $\int \frac{x-2}{x^2+1} \mathrm{d}x$,
   (n) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} \mathrm{d}x$,
   (o) $\int \frac{\cos x}{a+b \sin x} \mathrm{d}x$,
   (p) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x}$,
   (q) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$,
   (r) $\int \operatorname{tg}^2 x \mathrm{d}x$.

2. Obliczyć całki przez zamianę zmiennej

   (a) $\int \sqrt{2x+5} \mathrm{d}x$,
   (b) $\int \frac{2\mathrm{d}x}{(x-5)^4}$,
   (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x+3}$,
   (d) $\int \cos mx \mathrm{d}x, m \neq 0$,
   (e) $\int (\sin 3x + \cos 2x) \mathrm{d}x$,
   (f) $\int (3 \sin x \cos x + 2) \mathrm{d}x$,
   (g) $\int \sin^2 x \mathrm{d}x$,
   (h) $\int x(x^2+1)^3 \mathrm{d}x$,
   (i) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2+2}}$,
   (j) $\int x\sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x$,
   (k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+4}$,
   (l) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}, a > 0$,
   (m) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4}$,
   (n) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^6}$,
   (o) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$,
   (p) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$,
   (q) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-x^4}}, a > 0$,
   (r) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}, a > 0$,
   (s) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}, a \neq 0$,
   (t) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$,
   (u) $\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$,

(v) $\int e^{\alpha x} \mathrm{d}x$, $\alpha \neq 0$,

(w) $\int xe^{-x^2} \mathrm{d}x$,

(x) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$, (podstawić $x = \sin u$),

(y) $\int \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x$.

3. Obliczyć całki przez części

(a) $\int \frac{x \mathrm{d}x}{\cos^2 x}$,

(b) $\int x^2 \cos x \mathrm{d}x$,

(c) $\int x^3 e^x \mathrm{d}x$,

(d) $\int x^3 e^{2x} \mathrm{d}x$,

(e) $\int x^2 (\cos x + e^x) \mathrm{d}x$,

(f) $\int x(x-1) e^x \mathrm{d}x$,

(g) $\int x \ln x \mathrm{d}x$,

(h) $\int \ln^2 x \mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$,

(j) $\int \operatorname{arc\,cos} x \mathrm{d}x$,

(k) $\int \operatorname{arc\,ctg} x \mathrm{d}x$,

(l) $\int x \operatorname{arc\,tg} x \mathrm{d}x$,

(m) $\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$,

(n) $\int e^x (3 \sin x + 2 \cos x) \mathrm{d}x$,

(o) $\int e^{mx} \cos nx \mathrm{d}x$,

(p) $\int e^{mx} \sin nx \mathrm{d}x$,

(q) $\int \cos^2 x \mathrm{d}x$.

Bibliografia

1. *Matematyka część I* W. Wrona
2. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski
3. *Rachunek różniczkowy i całkowy t. II* G. M. Fichtenholz