Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej, całka oznaczona

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia:
   (a) całka oznaczona o górnej granicy zmiennej,
   (b) całka oznaczona w granicach od a do b,
   (c) granice całkowania,
   (d) przedział całkowania,
   (e) całka niewłaściwa.
2. Własności całek oznaczonych.

Oznaczenia, terminologia i twierdzenia

1. **Całka oznaczona o górnej granicy zmiennej** Tę całkę funkcji $f(x)$, która zeruje się dla $x = a$, oznaczamy
$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{lub} \qquad \int_a^x f(u)\mathrm{d}u$$
i nazywamy *całką oznaczoną o górnej granicy zmiennej.* Mamy
$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a),$$
gdzie $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną dla funkcji $f(x)$, tzn.
$$F'(x) = f(x).$$

2. **Całka oznaczona funkcji $f(x)$ w granicach od a do b** Liczbę, która jest wartością całki
$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$
dla $x = b$, oznaczamy
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
i nazywamy *całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w granicach od a do b*.

3. **Granice całkowania** Liczby a i b nazywamy *granicami całkowania*.

4. **Przedział całkowania** Przedział domknięty o końcach a, b nazywamy *przedziałem całkowania*.

5. Mamy oczywiście: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

6. **Przyrost funkcji** $F(x)$ Różnicę $F(b) - F(a)$ nazywamy *przyrostem funkcji* $F(x)$ w granicach od a do b i notujemy w postaci
$$\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a),$$
co wypowiadamy krótko: *Całka oznaczona jest równa przyrostowi dowolnej całki nieoznaczonej w granicach całkowania*.

7. **Całka niewłaściwa** Często w zastosowaniach spotykamy się z *całką niewłaściwą*, tj.
$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x,$$
którą definiujemy jako następującą granicę:
$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty}[F(\beta) - F(a)].$$
Jeżeli granica po prawej stronie nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie istnieje.
Podobnie określamy całkę niewłaściwą
$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to-\infty}[F(b) - F(\alpha)].$$

8. Z innym rodzajem całki niewłaściwej spotykamy się w przypadku, gdy funkcja podcałkowa nie jest ograniczona w otoczeniu jednego z końców przedziału całkowania. Całkę określamy wtedy w następujący sposób:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\beta\to b\\ a<\beta<b}}\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\beta\to b\\ a<\beta<b}}[F(\beta) - F(a)],$$
gdy $f(x)$ nie jest ograniczona w otoczeniu punktu $x = b$ i analogicznie
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\alpha\to a\\ a<\alpha<b}}\int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\alpha\to a\\ a<\alpha<b}}[F(b) - F(\alpha)],$$
gdy $f(x)$ nie jest ograniczona w otoczeniu punktu $x = a$.

9. **Własności całek oznaczonych**

   (a) Wartość całki oznaczonej nie zależy od oznaczenia zmiennej podcałkowej:
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u \qquad \text{itp.}$$
   i także
   $$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(u)\mathrm{d}u.$$

(b) Gdy granica górna równa jest dolnej, to całka oznaczona jest równa zeru

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$$

(c) Przestawianie granic całkowania zmienia znak całki

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(d) Pochodna całki oznaczonej względem zmiennej górnej granicy jest równa wartości funkcji podcałkowej dla tej granicy

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = f(t).$$

(e) Pochodna całki względem dolnej granicy jest równa wartości funkcji podcałkowej dla tej granicy ze znakiem przeciwnym

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = -f(t).$$

(f) Dla trzech dowolnych liczb a, b, c leżacych w przedziale ciągłości $f(x)$ zachodzi związek

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(g) Stałą można wyłączyć przed znak całki oznaczonej

$$\int_a^b m \cdot f(x)\mathrm{d}x = m\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(h) Całka oznaczona sumy funkcji jest równa sumie całek składników

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Pomocne wzory

1. $a^{\log_a b} = b$,
2. $\log_a b^c = c\log_a b$,
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1.$

Zadania

1. Obliczyć całki

(a) $\int_{-1}^{3} x\mathrm{d}x$,

(b) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$,

(c) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$,

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\mathrm{d}x$,

(e) $\int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$,

(f) $\int_{-\pi/4}^{0} \operatorname{tg} x\mathrm{d}x$,

(g) $\int_{-\pi/4}^{0} \operatorname{tg} u\mathrm{d}u$,

(h) $\int_0^1 x^n\mathrm{d}x, n \neq 1$,

(i) $\int_0^a \frac{x^2}{x^3+a^3}\mathrm{d}x$.

2. Obliczyć całki niewłaściwe

(a) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$,

(b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$,

(c) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$,

(d) $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x$,

(e) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}, a > 0$,

(f) $\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$,

(g) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$,

(h) $\int_{-1}^0 \frac{-x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

Bibliografia

1. *Matematyka część I* W. Wrona

2. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski