Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

ciągi liczbowe, działania na ciągach, ciągi monotoniczne, ciągi ograniczone

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Definicja ciągu nieskończonego;
2. Postęp arytmetyczny;
3. Postęp geometryczny;
4. Ciąg sum częściowych;
5. Działania na ciągach;
6. Ciągi monotoniczne;
7. Ciągi ograniczone;

Oznaczenia i terminologia

1. **Nieskończony ciąg liczbowy** Jeżeli każdej liczbie naturalnej n zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista u_n, to mówimy, że został określony *nieskończony ciąg liczbowy*.
2. **Wyraz ciągu** Liczby $u_1, u_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami ciągu*.
3. **Wyraz ogólny ciągu** Symbol u_n nazywamy *wyrazem ogólnym ciągu*.
4. **Postęp arytmetyczny** Postęp (ciąg) arytmetyczny, to ciąg liczbowy $\{a_n\}$, w którym każdy kolejny wyraz od drugiego począwszy jest sumą wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego oraz ustalonej liczby r zwanej *różnicą ciągu*:

   $$a_n = a_{n-1} + r \text{ dla } n > 1.$$

   Pierwszy wyraz $a_1 = a$ i różnica r wyznaczają postęp arytmetyczny.
5. **Postęp geometryczny** Postęp (ciąg) geometryczny, to ciąg liczbowy $\{a_n\}$, którego każdy kolejny wyraz od drugiego począwszy jest iloczynem wyrazu poprzedniego i pewnej stałej q nazwanej *ilorazem ciągu*:

   $$a_n = q \cdot a_{n-1} \text{ dla } n > 1.$$

   Pierwszy wyraz $a_1 = a$ i iloraz q wyznaczają postęp geometryczny.

6. **Ciąg sum częściowych postępu arytmetycznego** Mając dany postęp arytmetyczny można utworzyć nowy ciąg
$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$
gdzie
$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2 = 2a_1 + r, \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 2r,$$
$$\ldots \qquad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = na_1 + (n-1)r, \qquad \ldots$$
Jest to tak zwany *ciąg sum częściowych postępu arytmetycznego*.

7. **Ciąg sum częściowych postępu geometrycznego** Mając dany postęp geometryczny można utworzyć nowy ciąg
$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$
gdzie
$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2 = a_1(1+q), \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1+q+q^2),$$
$$\ldots \qquad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}), \qquad \ldots$$
Jest to tak zwany *ciąg sum częściowych postępu geometrycznego*.

8. **Działania na ciągach**

   (a) Ciąg *mnożymy przez liczbę*, mnożąc każdy wyraz ciągu przez tę liczbę.

   (b) Dwa dowolne ciągi *dodajemy, odejmujemy, mnożymy lub dzielimy przez siebie*, dodając, odejmując, mnożąc lub dzieląc wyrazy jednego ciągu przez odpowiednie wyrazy drugiego.

   (c) Iloraz ciągów można obliczyć jedynie wtedy, gdy dla ciągu $\{b_n\}$, przez który dzielimy, zachodzi $b_n \neq 0$ dla wszystkich wskaźników n, tzn. gdy ciąg $\{b_n\}$ ma wszystkie wyrazy różne od zera.

9. **Ciąg monotoniczny** Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy

   (a) *rosnącym*, jeżeli każdy wyraz następny jest większy od poprzedzającego, tzn. gdy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$
   $$a_{n+1} > a_n, \quad \text{tzn.} \quad a_{n+1} - a_n > 0,$$

   (b) *nierosnącym*, jeżeli każdy wyraz następny jest niewiększy od poprzedzającego, tzn. gdy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$
   $$a_{n+1} \leq a_n, \quad \text{tzn.} \quad a_{n+1} - a_n \leq 0,$$

   (c) *malejącym*, jeżeli każdy wyraz następny jest mniejszy od poprzedzającego, tzn. gdy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$
   $$a_{n+1} < a_n, \quad \text{tzn.} \quad a_{n+1} - a_n < 0,$$

   (d) *niemalejącym*, jeżeli każdy wyraz następny jest niemniejszy od poprzedzającego, tzn. gdy dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$
   $$a_{n+1} \geq a_n, \quad \text{tzn.} \quad a_{n+1} - a_n \geq 0,$$

   Ciąg $\{a_n\}$ jest *monotoniczny*, gdy spełnia któryś z warunków (a)-(d). Ciąg $\{a_n\}$ jest *ściśle monotoniczny*, gdy jest rosnący albo malejący.

10. **Ciąg ograniczony** Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy *ograniczonym*, gdy każdy jego wyraz ma bezwzględną wartość nie przekraczającą pewnej stałej liczby dodatniej M, tzn. gdy

$$|a_n| \leq M,$$

dla wszystkich wskaźników n, a zatem gdy

$$-M \leq a_n \leq M \quad (M > 0),$$

tzn. gdy wszystkie wyrazy ciągu zawierają się w skończonym przedziale $[-M, M]$.

Twierdzenia

1. **Suma pierwszych n wyrazów postępu arytmetycznego** Dany jest ciąg arytmetyczny $a_1, a_2, \ldots$ Suma pierwszych $n \in \mathbb{N}$ wyrazów ciągu arytmetycznego dana jest wzorem

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Jest to wzór na n-ty wyraz ciągu sum częściowych postępu arytmetycznego.

2. **Suma pierwszych n wyrazów postępu geometrycznego** Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, a $q \in \mathbb{R}$ jego ilorazem. Suma pierwszych $n \in \mathbb{N}$ wyrazów ciągu geometrycznego dana jest wzorem

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \begin{cases} a\frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1, \\ na & \text{dla} \quad q = 1. \end{cases}$$

Jest to wzór na n-ty wyraz ciągu sum częściowych postępu geometrycznego.

Zadania

1. Wypisać kilka pierwszych wyrazów ciągu

   (a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$,

   (b) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$,

   (c) $\left\{(-1)^n(n+1)\right\}$,

   (d) $\left\{\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)\right\}$,

   (e) $\{1\}$,

   (f) będącego przybliżeniami dziesiętnymi przez niedomiar liczby π.

   Obliczyć wyraz 35 dla tych ciągów.

2. Ile wynosi pierwszy wyraz i różnica następującego ciągu arytmetycznego?

   (a) $5, 8, 11, 14, \ldots$,

   (b) $1, 3, 5, 7, \ldots$,

   (c) $12, -12, -36, -60, \ldots$.

3. Napisać kilka pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego o podanym pierwszym wyrazie i różnicy

(a) $a = 2, r = 4,$ (b) $a = 10, r = -3,$ (c) $a = -10, r = 3.$

4. Napisać wzór na wyraz a_n dla ciągów arytmetycznych z zadania 2 i 3. Następnie napisać wzór na a_{10}.

5. Dla ciągów arytmetycznych z zadania 2 i 3 obliczyć sumę pierwszych

   (a) 4 wyrazów, (b) 10 wyrazów, (c) 100 wyrazów.

6. Ile wynosi pierwszy wyraz i iloraz następującego ciągu geometrycznego?

   (a) $1, 2, 4, 8, \ldots,$ (b) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots,$ (c) $12, -12, 12, -12, \ldots.$

7. Napisać kilka pierwszych wyrazów postępu geometrycznego o podanym pierwszym wyrazie i ilorazie

   (a) $a = 2, q = 4,$ (b) $a = 7, q = 1,$ (c) $a = 10, q = -3,$ (d) $a = -10, q = 3.$

8. Napisać wzór na wyraz a_n dla ciągów geometrycznych z zadania 6 i 7. Następnie napisać wzór na a_{10}.

9. Dla ciągów geometrycznych z zadania 6 i 7 obliczyć sumę pierwszych

   (a) 4 wyrazów, (b) 10 wyrazów, (c) 100 wyrazów.

10. Dla postępu

    (a) $2, 4, 6, \ldots,$ (b) $5, 9, 13, \ldots,$ (c) $10, 5, 0, -5\ldots,$ (d) $1, \frac{3}{2}, 2, \ldots,$ (e) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8},$ (f) $2, 4, 8, \ldots,$ (g) $5, -10, 20, \ldots,$ (h) $0{,}2,\ 0{,}02,\ 0{,}002, \ldots$

    obliczyć dziesiąty wyraz a_{10} i sumę pierwszych dziesięciu wyrazów S_{10}.

11. Obliczyć n-ty wyraz ciągu będącego sumą, różnicą, iloczynem i ilorazem ciągów

    (a) $\{a_n\} = \{2\}$ oraz $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\},$ (b) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ oraz $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\},$ (c) $\{a_n\} = \{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ oraz $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\},$ (d) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ oraz $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$

    Wypisać po trzy pierwsze wyrazy otrzymanych ciągów.

12. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu

    (a) $\{a_n\} = \left\{\frac{2n+3}{n+1}\right\},$ (b) $\{a_n\} = \{3n+2\},$ (c) $\{a_n\} = \left\{\frac{1-n}{n+1}\right\},$ (d) $\{a_n\} = \left\{\frac{3n+1}{3n-1}\right\},$ (e) $\{a_n\} = \{\sqrt{n+2}\},$ (f) $\{a_n\} = \left\{2 - \frac{1}{n}\right\},$

13. Podać przykład ciągu niemonotonicznego.

Bibliografia

1. *Matematyka cz. I* W. Wrona