Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

funkcje jednej zmiennej, składanie funkcji, funkcje odwrotne, funkcje elementarne

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia

   (a) funkcja jednej zmiennej,
   (b) argument funkcji (zmienna niezależna),
   (c) zmienna zależna,
   (d) wartość argumentu,
   (e) wartość funkcji w punkcie,
   (f) dziedzina (pole określoności) funkcji,
   (g) zakres funkcji,
   (h) wykres funkcji,
   (i) funkcja złożona,
   (j) funkcja zewnętrzna,
   (k) funkcja wewnętrzna,
   (l) funkcja różnowartościowa (iniekcja),
   (m) funkcja rosnąca,
   (n) funkcja malejąca,
   (o) iloraz różnicowy,
   (p) funkcja ograniczona,
   (q) funkcja okresowa (periodyczna),
   (r) funkcja parzysta,
   (s) funkcja nieparzysta,
   (t) funkcja odwrotna,
   (u) funkcja odwracalna,
   (v) funkcje elementarne,
   (w) część całkowita (cecha, podłoga, *entier*) liczby rzeczywistej,
   (x) cecha główna (sufit) liczby rzeczywistej,
   (y) część ułamkowa (mantysa) liczby rzeczywistej.

2. Podstawowe funkcje elementarne

   (a) wielomian,
   (b) funkcja kwadratowa,
   (c) wielomian trzeciego stopnia,
   (d) funkcja wymierna,
   (e) funkcja homograficzna,
   (f) funkcja potęgowa,
   (g) funkcja wykładnicza,
   (h) funkcja logarytmiczna,
   (i) funkcje trygonometryczne,
   (j) funkcje cyklometyrczne (kołowe).

3. Własności funkcji

(a) wykładniczej, (b) logarytmicznej, (c) trygonometrycznych.

4. Wzory redukcyjne.
5. Tożsamości trygonometryczne.

Oznaczenia, terminologia, twierdzenia

1. **Funkcja jednej zmiennej** Jeżeli każdej liczbie x ze zbioru A przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba y pewnego zbioru B, to mówimy, że w zbiorze liczb A określona jest pewna *funkcja* f. Przyporządkowanie to zapisujemy
$$y = f(x).$$
2. **Argument funkcji (zmienna niezależna)** Literę x w powyższym wzorze nazywamy *argumentem funkcji* (*zmienną niezależną*).
3. **Zmienna zależna** Literę y w powyższym wzorze nazywamy *zmienną zależną*.
4. **Wartość argumentu (wartość zmiennej niezależnej x)** Określoną liczbę x_0 ze zbioru A nazywamy *wartością argumentu* funkcji f albo *wartością zmiennej niezależnej* x.
5. **Wartość funkcji w punkcie** Liczbę y_0 ze zbioru B przyporządkowaną liczbie x_0 nazywamy *wartością funkcji* f w punkcie x_0.
6. **Dziedzina (pole określoności) funkcji** Zbiór A wartości argumentów funkcji f nazywamy *dziedziną funkcji* f albo *polem określoności* funkcji f.
7. **Zakres funkcji** Zbiór B wartości funkcji f nazywamy *zakresem funkcji* f.
8. **Wykres funkcji** Zbiór tych punktów M na płaszczyźnie, których odciętymi są liczby należące do zbioru A, a rzędnymi są przyporządkowane im wartości funkcji, nazywamy *wykresem funkcji*.
9. **Funkcja złożona** Niech
$$z = g(x)$$
będzie funkcją, której polem jest zbiór liczb A, a zakresem zbiór liczb B, natomiast
$$y = h(z)$$
niech będzie funkcją, której polem jest zbiór liczb C, a zakresem zbiór liczb D. Jeżeli zbiór B jest zawarty w zbiorze liczb C, to oba powyższe wzory wspólnie przyporządkowują każdej liczbie x ze zbioru A dokładnie jedną liczbę y ze zbioru D, a więc określają nową funkcję, co zapisujemy
$$y = h\big(g(x)\big).$$
Funkcję określoną w ten sposób w zbiorze liczb A nazywamy *funkcją złożoną* lub *funkcją superponowaną*.
10. **Funkcja zewnętrzna** Funkcja h z powyższego wzoru nazywana jest *funkcją zewnętrzną* funkcji złożonej.
11. **Funkcja wewnętrzna** Funkcja g z powyższego wzoru nazywana jest *funkcją wewnętrzną* funkcji złożonej.

12. **Funkcja różnowartościowa (iniekcja)** Funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją różnowartościową* (*iniekcją*) w zbiorze A, jeżeli dla każdej pary różnych wartości $x_1 \neq x_2$ z tego zbioru odpowiadające im wartości funkcji są różne: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

13. **Funkcja rosnąca** Funkcję nazywamy *funkcją rosnącą* w zbiorze A, jeżeli dla każdej pary wartości $x_1 < x_2$ z tego zbioru jest $f(x_1) < f(x_2)$.

14. **Funkcja malejąca** Funkcję nazywamy *funkcją malejącą* w zbiorze A, jeżeli dla każdej pary wartości $x_1 < x_2$ z tego zbioru jest $f(x_1) > f(x_2)$.

15. Funkcja rosnąca i funkcja malejąca są funkcjami różnowartościowymi.

16. **Iloraz różnicowy** Wyrażenie

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad \text{gdzie} \qquad x_1 < x_2,$$

nazywamy *ilorazem różnicowym*.

17. Funkcja f jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz różnicowy jest dodatni.

18. Funkcja f jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz różnicowy jest ujemny.

19. **Funkcja ograniczona** Funkcję $y = f(x)$ określoną w pewnym zbiorze wartości argumentu x nazywamy *ograniczoną* w tym zbiorze, gdy istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$|f(x)| \leq M$$

dla wszystkich x rozważanego zbioru. Stąd wynika, że dla punktów $P(x, y)$ wykresu funkcji ograniczonej zachodzi

$$-M \leq y \leq M,$$

a zatem wykres funkcji ograniczonej leży w pasie ograniczonym prostymi $y = -M$ i $y = M$.

20. **Funkcja okresowa (periodyczna)** Funkcję $y = f(x)$ nazywamy *okresową* lub *periodyczną*, jeżeli istnieje taka liczba $a \neq 0$, która dodana do dowolnej dopuszczalnej wartości argumentu nie zmienia wartości funkcji, tzn.

$$f(x + a) = f(x).$$

21. **Okres** Liczbę a z poprzedniej definicji nazywamy *okresem*.

22. **Okres podstawowy** Gdy istnieje najmniejszy dodatni okres funkcji, to nazywamy go *okresem podstawowym*.

23. Jeżeli a jest okresem funkcji, to także $k \cdot a$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą, jest okresem funkcji:

$$f(x + 2a) = f\big((x + a) + a\big) = f(x + a) = f(x),$$
$$f(x + 3a) = f\big((x + 2a) + a\big) = f(x + 2a) = f(x),$$

więc na podstawie indukcji ogólnie dla k całkowitego mamy

$$f(x + ka) = f(x).$$

24. Wykres funkcji okresowej wystarczy wykonać w przedziale o długości równej okresowi a, np. w przedziale $[0; a]$. W dalszych przedziałach o długości a wartości funkcji będą się powtarzały.

25. **Funkcja parzysta** Funkcję $y = f(x)$ nazywamy *parzystą*, jeżeli przeciwnym wartościom argumentu (różniącym się jedynie znakiem) odpowiadają te same wartości funkcji, tzn. gdy

$$f(-x) = f(x).$$

Odciętym $-x$ i x odpowiadają te same rzędne, a zatem wykres funkcji parzystej jest symetrycznie położony względem osi y-ów.

26. **Funkcja nieparzysta** Funkcję $y = f(x)$ nazywamy *nieparzystą*, jeżeli przeciwnym wartościom argumentu (różniącym się jedynie znakiem) odpowiadają przeciwne wartości funkcji, tzn. gdy

$$f(-x) = -f(x).$$

Odciętym $-x$ i x odpowiadają rzędne y i $-y$, a zatem wykres funkcji nieparzystej jest symetrycznie położony względem początku układu współrzędnych.

27. **Funkcja odwrotna** Jeżeli związek

$$y = f(x)$$

określa w zbiorze A funkcję różnowartościową, mającą jako zakres zbiór B, to związek ten określa także w zbiorze B funkcję g, zwaną *funkcją odwrotną* do funkcji f,

$$x = g(y),$$

jaką otrzymamy, gdy dowolnej liczbie y_0 ze zbioru B przyporządkujemy taką liczbę x_0 ze zbioru A, dla której $y_0 = f(x_0)$. Zakresem funkcji g jest zbiór A.

28. **Funkcja odwracalna** Funkcję mającą funkcję odwrotną nazywa się *funkcją odwracalną*.

29. **Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej** Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest określona i rosnąca w przedziale $a \leq x \leq b$, przy czym $f(a) = c$ oraz $f(b) = d$, to istnieje funkcja g, odwrotna do funkcji f, która jest określona i rosnąca w przedziale domkniętym $[c, d]$.

30. **Funkcja odwrotna do funkcji malejącej** Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest określona i malejąca w przedziale $a \leq x \leq b$, przy czym $f(a) = c$ oraz $f(b) = d$, to istnieje funkcja g, odwrotna do funkcji f, która jest określona i malejąca w przedziale domkniętym $[d, c]$.

31. **Podstawowe funkcje elementarne** *Podstawowymi funkcjami elementarnymi* nazywamy następujące funkcje:

    (a) funkcję identycznościową $y = x$,

    (b) funkcję stałą $y = \text{const}$,

    (c) funkcję wykładniczą $y = e^x$,

    (d) funkcję trygonometryczną $y = \sin x$.

32. **Funkcje elementarne** *Funkcjami elementarnymi* nazywamy wszystkie funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji składania i odwracania funkcji.

33. **Wielomian** *Wielomianem* nazywamy funkcję postaci

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą nieujemną oraz $a_0, a_1, \ldots, a_n$ oznaczają liczby dane.

34. **Funkcja kwadratowa (trójmian kwadratowy)** *Funkcją kwadratową* albo *trójmianem kwadratowym* nazywamy wielomian stopnia drugiego

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad \text{gdzie} \qquad a \neq 0.$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o osi równoległej do osi y, której wierzchołek leży w punkcie

$$W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

a ognisko w punkcie

$$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right),$$

gdzie

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

nazywamy *wyróżnikiem trójmianu*. Parametrem tej paraboli jest

$$p = \frac{1}{2|a|}.$$

Parabola jest zwrócona wierzchołkiem do góry lub na dół zależnie od tego, czy $a < 0$, czy też $a > 0$.

35. **Wielomian trzeciego stopnia** *Wielomianem trzeciego stopnia* nazywamy funkcję

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad \text{gdzie} \qquad a \neq 0.$$

Wykres tej funkcji nazywamy *parabolą trzeciego stopnia*.

36. **Funkcja wymierna** *Funkcją wymierną* nazywamy iloraz dwóch wielomianów nie posiadających wspólnych dzielników. Funkcja wymierna określona jest dla wszystkich tych wartości argumentu x, dla których mianownik jest różny od zera.

37. **Funkcja homograficzna** *Funkcją homograficzną* nazywamy funkcję

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad \text{gdzie} \qquad c \neq 0.$$

Jej obszarem określoności są wszystkie liczby rzeczywiste $x \neq -\frac{d}{c}$. W przypadku, gdy licznik nie jest proporcjonalny do mianownika, tzn. gdy $ad - bc \neq 0$, wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola równoboczna o asymptotach równoległych do osi układu. Gdy $ad - bc = 0$, to funkcja przybiera postać stałej, a jej wykresem jest linia prosta równoległa do osi x bez jednego punktu, którego odcięta wynosi $x = -\frac{d}{c}$.

38. **Funkcja potęgowa** Funkcję postaci

$$y = ax^n,$$

gdzie a i n oznaczają stałe, nazywamy *funkcją potęgową*. Wszystkie funkcje potęgowe określone są dla $x > 0$, a niektóre także dla innych wartości x.

39. **Wyznaczanie wzoru funkcji potęgowej** Dana jest funkcja potęgowa postaci $y = ax^n$, gdzie a, n oznaczają stałe. Wartości tych stałych można wyznaczyć, gdy znane są dwie wartości funkcji – wiedząc, że funkcja przybiera w punktach x_1 i x_2 odpowiednio wartości y_1 i y_2, mamy

$$y_1 = ax_1^n, \qquad y_2 = ax_2^n,$$

a stąd

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n,$$

więc

$$n = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{\ln x_1 - \ln x_2}.$$

Znając n znajdujemy a z dowolnego ze związków.

40. **Funkcja wykładnicza** *Funkcją wykładniczą* nazywamy funkcję

$$y = a^x,$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, którą nazywamy *podstawą* potęgi; x nazywamy tutaj *wykładnikiem* potęgi. Funkcja potęgowa określona jest dla wszystkich x rzeczywistych i jest stale

$$a^x > 0.$$

Funkcja $y = a^x$ ($a \neq 1$) przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste y większe od zera.

41. **Określenia dotyczące funkcji wykładniczej**

(a) dla $x = n$, gdzie n jest liczbą naturalną, tzn. całkowitą dodatnią, mamy

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}},$$

(b) dla $x = 0$ mamy

$$a^0 = 1,$$

(c) dla $x = \frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi, mamy

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

(d) dla $x < 0$ mamy $-x > 0$ oraz

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

42. **Własności funkcji wykładniczej**

(a) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, tzn. potęgi o tych samych podstawach mnożymy dodając wykładniki,

(b) $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$, tzn. potęgi o tych samych podstawach dzielimy odejmując wykładniki,

(c) $(a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} = a^{x_1 \cdot x_2}$, tzn. potęgę potęgujemy mnożąc wykładniki,

(d) $(ab)^x = a^x b^x$, tzn. iloczyn potęgujemy potęgując każdy czynnik,

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, tzn. ułamek potęgujemy potęgując licznik i mianownik.

43. **Pierwiastkowanie**

(a) Gdy n jest liczbą parzystą $\sqrt[n]{b}$, gdzie $b \geq 0$, oznacza jedyną liczbę nieujemną c, taką że $c^n = b$.

(b) Gdy n jest liczbą nieparzystą $\sqrt[n]{b}$ oznacza taką jedyną liczbę c, że zachodzi $c^n = b$.

(c) Gdy n jest liczbą nieparzystą, pierwiastek można wyciągać z każdej liczby rzeczywistej dodatniej lub ujemnej.

44. **Funkcja logarytmiczna** Funkcja

$$y = \log_a x, \qquad \text{gdzie} \qquad a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

jest funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej. Wzór ten należy rozumieć tak, że *y jest wykładnikiem potęgowym, do którego należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę x*. Równoważne jest równanie

$$a^y = x.$$

Funkcja logarytmiczna określona jest dla wszystkich wartości argumentu $x > 0$.

45. **Własności funkcji logarytmicznej**

(a) $a^{log_a x} = x$,

(b) $\log_a a^x = x$,

(c) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, tzn. logarytm iloczynu jest równy sumie logarytmów czynników,

(d) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$, tzn. logarytm ilorazu jest równy różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika,

(e) $\log_a x^u = u \log_a x$, tzn. potęgę logarytmujemy mnożąc jej wykładnik przez logarytm podstawy.

46. **Logarytm dziesiętny i naturalny** Spośród nieskończenie wielu funkcji logarytmicznych wyróżniamy dwie następujące:

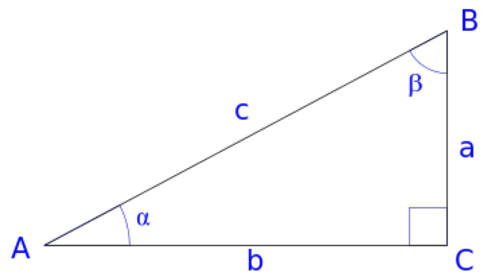
$$\textit{logarytm dziesiętny}: y = \log_{10} x = \lg x,$$

$$\textit{logarytm naturalny}: y = \log_e x = \ln x.$$

47. **Funkcje trygonometryczne** *Funkcje trygonometryczne* to funkcje matematyczne, wyrażające między innymi stosunki między długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów wewnętrznych. Oznaczamy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Rysunek 1: Oznaczenia boków i kątów trójkąta prostokątnego użyte w definicji.

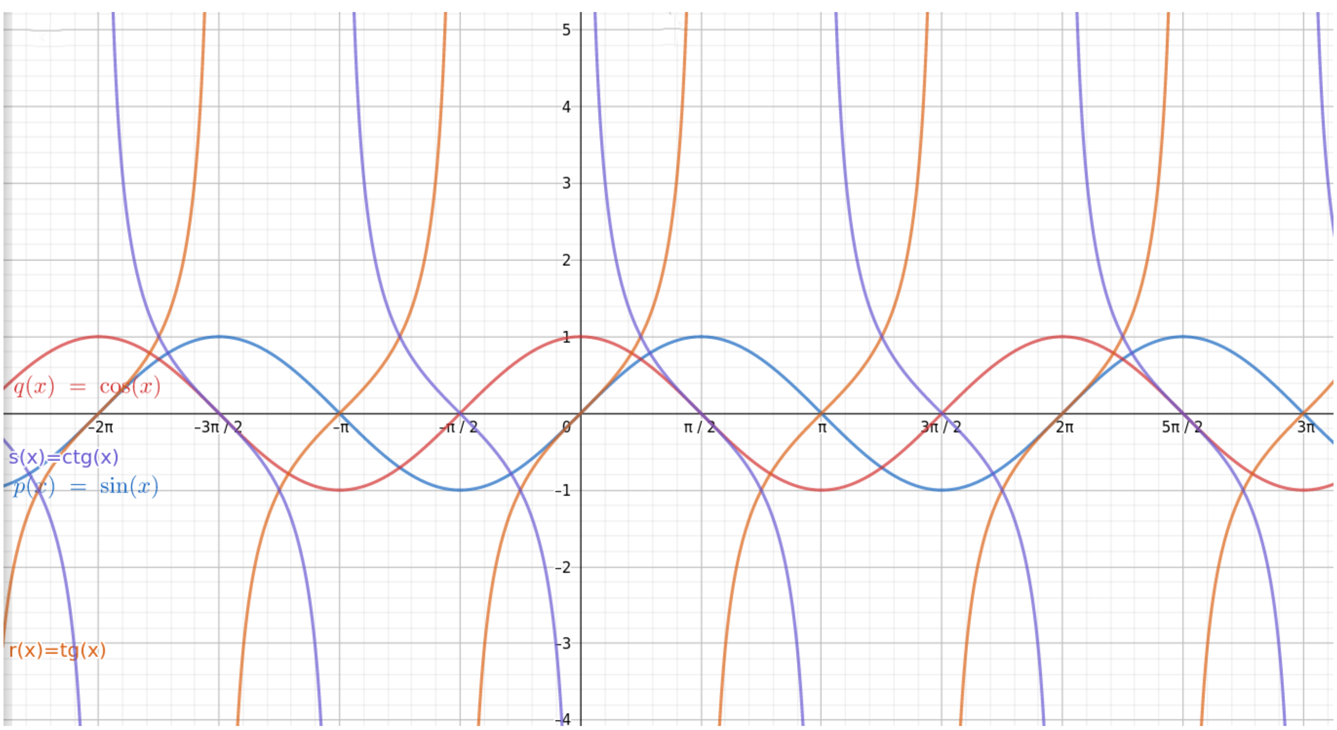
(a) Funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ są określone dla wszystkich wartości $x \in \mathbb{R}$ i przybierają wszystkie wartości $-1 \leq x \leq 1$.

(b) Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest określona dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu, spełniających warunek

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{gdzie} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Funkcja $y = \operatorname{ctg} x$ jest określona dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu, spełniających warunek

$$x \neq k\pi, \qquad \text{gdzie} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



Rysunek 2: Wykresy funkcji trygonometrycznych.

48. **Wzory redukcyjne**

(a) $\sin(-x) = -\sin x$,
(b) $\cos(-x) = \cos x$,
(c) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,
(d) $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$,
(e) $\sin(x+\pi) = -\sin x$,
(f) $\cos(x+\pi) = -\cos x$,
(g) $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$,
(h) $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$,
(i) $\sin(\pi - x) = \sin x$,
(j) $\cos(\pi - x) = -\cos x$,
(k) $\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,
(l) $\operatorname{ctg}(\pi - x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$,
(m) $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$,
(n) $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$,
(o) $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{ctg} x$,
(p) $\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{tg} x$,
(q) $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$,
(r) $\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\sin x$,
(s) $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{ctg} x$,
(t) $\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{tg} x$.

49. **Wartości funkcji trygonometrycznych**

Wartości funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$ łatwo zapamiętać przy pomocy tabeli:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\cos x$
	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0	x

Wartości funkcji $\operatorname{tg} x$ oraz $\operatorname{ctg} x$ oblicza się z zależności $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnych wartości kąta $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ odczytuje się z tablic.

50. **Tożsamości trygonometryczne**

(a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,
(b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,
(c) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,
(d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,
(e) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,
(f) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$,
(g) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$,
(h) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$,
(i) $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$,
(j) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

51. **Funkcje cyklometryczne (kołowe)** *Funkcje cyklometryczne* (*kołowe*), to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych ograniczonych do pewnych przedziałów. Funkcje trygonometryczne rozpatrywane na tych przedziałach są różnowartościowe i mają funkcje odwrotne.

(a) *arcus sinus* ($\arcsin$) jest funkcją odwrotną do funkcji sinus rozpatrywanej na przedziale $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. W tym przedziale sinus jest funkcją rosnącą (zatem różnowartościową), wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona na przedziale $[-1; 1]$ (czyli obrazie przedziału $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ przez funkcję sin),

(b) *arcus cosinus* ($\arccos$) jest funkcją odwrotną do funkcji cosinus rozpatrywanej na przedziale $[0; \pi]$. W przedziale tym cosinus jest funkcją malejącą (zatem różnowartościową), wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona na przedziale $[-1; 1]$ (czyli obrazie przedziału $[0, \pi]$ przez funkcję cos),

(c) *arcus tangens* (arc tg) jest funkcją odwrotną do funkcji tangens rozpatrywanej na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. W przedziale tym tangens jest funkcją rosnącą (zatem różnowartościową), wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona w zbiorze $\mathbb{R}$ (czyli obrazie przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ przez funkcję tg),

(d) *arcus cotangens* (arc ctg) jest funkcją odwrotną do funkcji cotangens rozpatrywanej na przedziale $(0, \pi)$. W przedziale tym cotangens jest funkcją malejącą (zatem różnowartościową), wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona w zbiorze $\mathbb{R}$ (czyli obrazie przedziału $(0, \pi)$ przez funkcję ctg).

Związek $x = \operatorname{arc}\sin y$ rozumiemy: *x jest kątem mierzonym w radianach, zawartym w przedziale $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, którego sinus wynosi y.*

Przydatne wzory i fakty

1. **Twierdzenie Talesa** Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi nieprzechodzącymi przez wierzchołek kąta, to odpowiednie odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

2. **Pole trapezu** Pole trapezu obliczamy mnożąc sumę długości podstaw przez połowę wysokości.

3. **Część całkowita (cecha, podłoga, *entier*) liczby rzeczywistej $[x]$, $\lfloor x \rfloor$** Największa liczba całkowita nie większa od x nazywana jest *częścią całkowitą* (*cechą, podłogą, entier*) liczby x. Symbolicznie:
$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

4. **Cecha główna (sufit) liczby rzeczywistej $\lceil x \rceil$** Najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od x nazywana jest *cechą główną* (*sufitem*) liczby x. Symbolicznie:
$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}.$$

5. **Część ułamkowa (mantysa) liczby rzeczywistej $\{x\}$** Liczba równa $x - \lfloor x \rfloor$ nazywana jest *częścią ułamkową* (*mantysą*) liczby x.

Zadania

1. **Pojęcie funkcji**

   (a) Ile wartości funkcji odpowiada dla $y = f(x)$ każdej dopuszczalnej wartości argumentu?

   (b) Droga x przy wolnym spadku jest funkcją czasu t, tj. $x = \varphi(t)$, gdzie $\varphi(t) = \frac{gt^2}{2}$. Obliczyć:

   i. $\varphi(0,2)$, iii. $\varphi(1)$, v. $\varphi(3)$,
   ii. $\varphi(0,5)$, iv. $\varphi(2)$, vi. $\varphi(6,4)$.

   (c) W trójkącie ABC o podstawie $AC = b$ i wysokości $BD = h$ poprowadzono prostą EF równoległą do podstawy AC w odległości x od podstawy. Pole y trapezu $AEFC$ jest funkcją odległości x. Wyrazić y za pomocą x oraz podać obszar określoności tej funkcji.

2. **Sposoby przedstawienia funkcji**

   (a) Zbadać obszar określoności funkcji

i. $y = \frac{2x+5}{(x^2-9)(x^2-1)}$,
ii. $y = \sqrt{x-1}$,
iii. $y = \sqrt{x^2+4x-5}$,
iv. $y = \sqrt{x-x^2}$,
v. $y = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$,
vi. $y = \lg\frac{1-x}{2+x}$,
vii. $y = \lg(x^2-1)(x^2-4)$.

(b) Dla funkcji $y = f(x)$, gdzie $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, obliczyć wartości

i. $f(-2)$,
ii. $f(2)$,
iii. $f(3,5)$,
iv. $f(a)$,
v. $f(5a)$,
vi. $f(-x)$,
vii. $f(x+1)$,
viii. $f(x)+1$,
ix. $f(x+h)$,
x. $f(x^4)$,
xi. $f\left(\frac{1}{x}\right)$,
xii. $\frac{1}{f(x)}$,
xiii. $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

(c) Obliczyć tablicę wartości funkcji i naszkicować jej wykres

i. $y = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$,
ii. $y = x^4$ w przedziale $[-1,4;1,4]$,
iii. $y = \frac{1}{x^2}$,
iv. $y = \lfloor x \rfloor$,
v. $y = \{x\}$,
vi. $y = \frac{|x|}{x}$,
vii. $y = \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1, \\ x+1 & \text{dla} \quad 1 \le x < 2, \end{cases}$
viii. $y = \sqrt{1-x^2}$ dla $0 \le x \le 1$,
ix. $y = 3x+1$,
x. $y = \sqrt{x}$,
xi. $y = \frac{2}{x}$,
xii. $y = \frac{x+|x|}{2}$.

(d) Obliczyć wartości funkcji $y_1 = \lfloor x \rfloor$ i $y_2 = \lceil x \rceil$ dla wartości argumentu

i. $x = -27$,
ii. $x = 13,75$,
iii. $x = -\sqrt{2}$,
iv. $x = \pi$,
v. $x = 11$,
vi. $x = 11\frac{1}{3}$.

(e) Obliczyć tablicę wartości funkcji i naszkicować jej wykres

i. $y = x\lfloor x \rfloor$,
ii. $y = x^2$ dla $-1 \le x \le 1$,
iii. $y = (x-2)^2$ dla $1 \le x \le 3$.

(f) Wykonać na jednym rysunku wykresy funkcji

i. $y = \frac{1}{x^2}$ i $x = \frac{1}{y^2}$,
ii. $y = x^4$ i $x = y^4$,
iii. $y = 2x-3$ i $x = 2y-3$.

3. **Własności funkcji**

(a) Wykazać, że funkcja $y = x^2 - 2x + 1$ jest rosnąca w przedziale $[2;5]$.

(b) Zbadać monotoniczność funkcji

i. $y = \sqrt{x-1}$,
ii. $y = \frac{1}{x}$,
iii. $y = 2x+1$,
iv. $y = -3x+2$,
v. $y = x^2$,
vi. $y = \frac{1}{x-2}$,
vii. $y = \sqrt{2-x}$,
viii. $y = \sqrt{9-x^2}$.

(c) Czy jest ograniczona funkcja

i. $y = x^4$ w przedziale $[0;1]$,
ii. $y = \frac{1}{x^2}$ w przedziale $[-3;-1]$,
iii. $y = \frac{1}{x^2}$ w przedziale $(-1;0)$,
iv. $y = \frac{1}{x}$ w przedziale $(3,5)$,
v. $y = \frac{1}{x}$ w przedziale $\left(0;\frac{1}{2}\right)$,
vi. $y = \lfloor x \rfloor$ w przedziale $[-5;5]$.

(d) Wiedząc, że najmniejszym dodatnim okresem funkcji $\sin x$, $\cos x$ jest liczba 2π, a funkcji $\operatorname{tg} x$ – liczba π, znaleźć najmniejszy **dodatni** okres funkcji (czyli okres podstawowy):

i. $y = \operatorname{tg} 2x$,
ii. $y = \sin^2 x$,
iii. $y = \cos \frac{x}{2}$,
iv. $y = \sin(ax+b)$,
v. $y = \sin 4x + \cos 6x$.

(e) Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji

i. $y = \frac{1}{x^2}$,
ii. $y = x^2$,
iii. $y = x^4$,
iv. $y = x^{2n}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$,
v. $y = \cos x$,
vi. $y = \frac{|x|}{x}$,
vii. $y = \sin x$,
viii. $y = \operatorname{tg} x$,
ix. $y = x^{2n+1}$,
x. $y = x^4 + x^2$,
xi. $y = 2x - x^3$,
xii. $y = x^2 \sin x$,
xiii. $y = x \cos x$,
xiv. $y = \operatorname{ctg} x$,
xv. $y = x + \cos x$.

(f) Co można powiedzieć o iloczynie (ilorazie) funkcji parzystej przez nieparzystą?

(g) Czy funkcja, która nie jest parzysta, musi być nieparzysta?

4. **Wielomiany**

(a) Narysować wykresy funkcji

i. $y = -1,5x^2$,
ii. $y = 4x^2 - 8x + 3$,
iii. $y = x^2 - 2x + 1$,
iv. $y = 5 + 4x - x^2$,
v. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 8$,
vi. $y = 2x^3$,
vii. $y = 2x^3 + x$
viii. $y = x^3 + 2x - 1$,
ix. $y = x^3 - 2x$.

Wskazówka: Wykres funkcji $y = ax^3 + bx + c$ otrzymamy wykonując na jednym rysunku wykresy funkcji $y = ax^3$ i $y = bx + c$, a następnie dodając do siebie odpowiednie rzędne tych dwóch krzywych.

5. **Funkcje wymierne**

(a) Wykonać na jednym rysunku wykresy funkcji

i. $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{3}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = -\frac{3}{x}$.

(b) Obliczyć tablicę wartości funkcji i naszkicować jej wykres

i. $y = -\frac{1}{1+x^2}$,
ii. $y = x + \frac{1}{x}$.

6. **Funkcja odwrotna i funkcja potęgowa**

(a) Jaką funkcją jest funkcja odwrotna względem funkcji liniowej?

(b) Znaleźć funkcję odwrotną względem podanej funkcji i narysować jej wykres

i. $y = -3x + 2$,
ii. $y = 2x^2$,
iii. $y = \sqrt{2x}$,
iv. $y = x^4$,
v. $y = x^{-2}$.

(c) Wykonać wykres funkcji $y = x^{\frac{3}{2}}$.

(d) Znaleźć $y = ax^n$, gdy wiemy, że dla wartości argumentu $x_1 = 0,4$ i $x_2 = 2$ przybiera ona odpowiednio wartości $y_1 = 312,5$ i $y_2 = 0,5$.

7. **Funkcje wykładnicze, hiperboliczne i logarytmiczne**

(a) Podać przykład funkcji logarytmicznej malejącej.

(b) Obliczyć wartość funkcji $y = 4^x$ dla wartości argumentu:

i. $x = 4$,
ii. $x = 2\frac{1}{2}$,
iii. $x = -2$,
iv. $x = -\frac{1}{2}$,
v. $x = -1,5$,
vi. $x = 0$.

(c) Obliczyć wartość funkcji $y = 10^x$ dla wartości argumentu:

i. $x = 0$,
ii. $x = 1$,
iii. $x = -\frac{2}{3}$.

(d) Obliczyć wartości wyrażeń

i. $\frac{8^{-2/3} \cdot 4^{3/2} + 16^{3/4} \cdot 9^{1/2}}{(2^{1,5} \cdot 4^{0,25})^{-2}}$,
ii. $\frac{(100e^4)^{-1/2}}{(1000e^3)^{-2/3}}$.
iii. $\frac{3}{2} \lg 4 + 2 \lg 5 - \lg 2$.

(e) Wykreślić funkcje

i. $y = 2^x$,
ii. $y = 3 \cdot 2^x$,
iii. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,
iv. $y = 2 \cdot (\frac{1}{2})^x$,
v. $y = 2 \cdot 10^x$,
vi. $y = \log_2 x$,
vii. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$,
viii. $y = \log_{\frac{1}{10}} x$,
ix. $y = 3 \lg x$.

(f) Obliczyć wartości funkcji $y = \log_8 x$ dla wartości argumentu

i. $x = 8$,
ii. $x = 1$,
iii. $x = 64$,
iv. $x = \frac{1}{8}$,
v. $x = 2$,
vi. $x = 4$,
vii. $x = 16$,
viii. $x = \frac{1}{32}$.

(g) Obliczyć wartości funkcji $y = \lg x$ dla wartości argumentu

i. $x = 10$,
ii. $x = 1$,
iii. $x = \frac{1}{100}$,
iv. $x = 1000$,
v. $x = \sqrt{10}$,
vi. $x = \frac{100}{\sqrt[3]{10}}$.

(h) Obliczyć wartości funkcji $y = \ln x$ dla wartości argumentu

i. $x = 1$,
ii. $x = e$,
iii. $x = \frac{1}{e}$,
iv. $x = \frac{1}{e^2}$,
v. $x = \frac{1}{e\sqrt{e}}$,
vi. $x = e^3\sqrt{e^3}$.

8. **Funkcje trygonometryczne i kołowe**

(a) Podać wzory redukcyjne dla kątów:

i. $\frac{3}{2}\pi - x$, ii. $\frac{3}{2}\pi + x$, iii. $2\pi - x$.

(b) Wyrazić w mierze radianowej kąty:

i. $0°$, ii. $30°$, iii. $45°$, iv. $60°$, v. $90°$, vi. $120°$, vii. $135°$, viii. $150°$, ix. $180°$, x. $210°$, xi. $225°$, xii. $240°$, xiii. $270°$, xiv. $300°$, xv. $315°$, xvi. $330°$, xvii. $360°$, xviii. $450°$, xix. $1470°$, xx. $-540°$.

(c) Wyrazić w mierze stopniowej kąty:

i. $\frac{1}{10}\pi$, ii. $\frac{2}{5}\pi$, iii. $\frac{3}{8}\pi$, iv. $\frac{22}{9}\pi$, v. $-\frac{7}{5}\pi$, vi. $5\frac{1}{4}\pi$, vii. $-\frac{2}{3}\pi$.

(d) Obliczyć wartości funkcji

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \operatorname{tg} x, \qquad y = \operatorname{ctg} x$$

dla następujących wartości argumentu x

i. $\frac{2}{3}\pi$, ii. $\frac{4}{5}\pi$, iii. $\frac{7}{4}\pi$, iv. $\frac{5}{2}\pi$, v. $-8\frac{1}{6}\pi$, vi. -3π.

(e) Wykonać wykresy funkcji

i. $y = \sin 2x$, ii. $y = 3\sin x$, iii. $y = \sin\left(x - \frac{1}{6}x\right)$, iv. $y = 3\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$, v. $y = \cos 3x$, vi. $y = 2\operatorname{tg} x$, vii. $y = \operatorname{ctg} 3x$, viii. $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{4}x\right)$.

(f) Udowodnić, że zachodzą równości

i. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$,

ii. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha) = \cos^2\alpha - \cos^2\beta$,

iii. $-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha - \cos^2\beta$,

iv. $2\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = 1 + \sin\alpha$,

v. $4\sin\left(\frac{1}{12}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\alpha\right) = 1 - 2\sin\alpha$,

vi. $4\sin\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{12}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12}\pi\right) = \sqrt{3} - 2\cos\alpha$,

vii. $4\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \alpha\right)\sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\pi\right) = 1 - 4\cos^2\alpha$,

viii. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$,

ix. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$,

x. $\frac{4\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{1}{3}\pi-\alpha\right)}{\cos^2\alpha} = 3 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

(g) Znaleźć wszystkie kąty x zawarte w przedziale $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ spełniające warunek

i. $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, ii. $\sin x = 0,26$, iii. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

(h) Znaleźć wszystkie kąty spełniające warunek

i. $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$,
ii. $\sin x = 0,26$,
iii. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(i) Obliczyć

i. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
ii. $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
iii. $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})$,
iv. $\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})$,
v. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
vi. $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
vii. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}\sqrt{3}$,
viii. $\operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$,
ix. $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$,
x. $\arccos \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$,
xi. $\operatorname{arc\,ctg} \left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$,
xii. $\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}$,
xiii. $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$,
xiv. $\arccos \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$,
xv. $\operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(j) Obliczyć

i. $\sin \arccos x$,
ii. $\sin^2 \operatorname{arc\,tg} x$,
iii. $\arcsin \cos x$.

9. **Funkcje złożone**

(a) Czy zawsze z dwóch funkcji: $y = f(u)$ i $u = g(x)$ można utworzyć funkcję złożoną?

(b) Zapisać funkcję złożoną z poniższych funkcji i podać jej obszar określoności

i. $y = u^2$, $u = \frac{x}{x+1}$,
ii. $y = \sin u$, $u = (x-2)^2$,
iii. $y = z^3$, $z = \operatorname{tg} u$, $u = 3x^2$.

(c) Z jakich funkcji jest złożona funkcja i jaki jest jej obszar określoności?

i. $y = \sqrt{\sin x}$,
ii. $y = e^{ax}$,
iii. $y = \cos^3(5x)$,
iv. $y = \ln \sin e^{4x}$.

(d) Wykonać wykresy funkcji złożonych

i. $y = \ln(3 + 2\sin x)$,
ii. $y = e^{\sin x}$.

Bibliografia

1. *Matematyka część I* W. Wrona
2. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski