Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

obliczanie gradientu funkcji, obliczanie pochodnej kierunkowej funkcji wielu zmiennych

(wersja: 23 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie gradientu funkcji;
2. Obliczanie pochodnej kierunkowej funkcji;

Zadania

1. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x,y) = x^2 - xy$$
w punkcie $(2,-3)$ w kierunku wektora $\vec{v} = 0,6\hat{\imath} + 0,8\hat{\jmath}$.

2. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w kierunku wektora $\vec{v}$ dla $f(x,y) = \cos(\frac{x}{y})$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}$.

3. Obliczyć wartość największego przyrostu funkcji f we wskazanym punkcie i określić kierunek, w którym następuje ten maksymalny przyrost:
   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, w punkcie $(-2,3)$,
   (b) $f(x,y,z) = e^{2x}\cos(y-2z)$, w punkcie $(4,-2,0)$.

4. Wiedząc, że
$\vec{u} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$,
$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$,
$\vec{w} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{2}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$,
$D_{\vec{u}}f(-1,4) = \frac{14}{5}$,
$D_{\vec{v}}f(-1,4) = -\frac{22}{\sqrt{18}}$
obliczyć wartość $D_{\vec{w}}f(-1,4)$.

5. Obliczyć gradient funkcji:

(a) $f(x,y) = y^3x^5 + \ln(xy)$,

(b) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + y^4 \sin(xy)$.

(c) $f(x,y,z) = 4z - \frac{y^4}{2z^3} + \sqrt{x^3}(z-1)$,

(d) $f(x,y,z) = \cos(\frac{xy}{z}) + z^3y^2x$.

6. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w kierunku wektora $\vec{v}$:

   (a) $f(x,y,z) = x^2y^3 - 4xz$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\end{bmatrix}$,

   (b) $f(x,y,z) = 4x - y^2e^{3xz}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\end{bmatrix}$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 0)$.

   (c) $f(x,y) = \ln(2xy) - \sin(x^2+y^2)$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}7 & -3\end{bmatrix}$,

   (d) $f(x,y) = 4x^2y^3 - \sqrt{2x+5y}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}-1 & 4\end{bmatrix}$,

   (e) $f(x,y,z) = 8xy^2 - \frac{5z^2}{x} + y^4$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}-4 & 1 & 2\end{bmatrix}$,

   (f) $f(x,y,z) = \frac{3x}{y^2-z^3} + 5x^2 - 8y$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}0 & 3 & -2\end{bmatrix}$,

   (g) $f(x,y,z) = \ln\frac{x}{y} + \ln\frac{z}{y} + y^2x$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}1 & 5 & 2\end{bmatrix}$.

7. Obliczyć wartość największego przyrostu funkcji f we wskazanym punkcie i określić kierunek, w którym następuje ten maksymalny przyrost:

   (a) $f(x,y) = e^{4xy}$, w punkcie $(6, -2)$,

   (b) $f(x,y,z) = x^2y^4 - 3z^2x$, w punkcie $(1, -6, 3)$,

   (c) $f(x,y,z) = \ln\frac{2x+3y}{z}$, w punkcie $(2, 7, 4)$.

8. Wiedząc, że
   $\vec{u} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{4}{\sqrt{15}}\end{bmatrix}$,
   $\vec{v} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{34}} & -\frac{5}{\sqrt{34}}\end{bmatrix}$,
   $\vec{w} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,
   $D_{\vec{u}}f(0,1) = \frac{18}{\sqrt{45}}$,
   $D_{\vec{v}}f(0,1) = -\frac{40}{\sqrt{34}}$
   obliczyć wartość $D_{\vec{w}}f(0,1)$.

Bibliografia

1. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I/II* K. Krysicki, W. Włodarski