Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

granica ciągu, własności granic, liczba e

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie granic ciągów podstawowych typów:
   (a) stały,
   (b) o wyrazie ogólnym postaci $a_n = \frac{w_1(n)}{w_2(n)}$, gdzie $\deg(w_1) = \deg(w_2)$,
   (c) o wyrazie ogólnym postaci $a_n = \frac{w_1(n)}{w_2(n)}$, gdzie $\deg(w_1) > \deg(w_2)$,
   (d) o wyrazie ogólnym postaci $a_n = \frac{w_1(n)}{w_2(n)}$, gdzie $\deg(w_1) < \deg(w_2)$,
   (e) o wyrazie ogólnym w postaci różnicy pierwiastków drugiego stopnia lub podobnej, którego granicę oblicza się przy wykorzystaniu wzoru $(a - b) = \frac{a^2-b^2}{a+b}$,
   (f) o wyrazie ogólnym w postaci różnicy pierwiastków trzeciego stopnia lub podobnej, którego granicę oblicza się przy wykorzystaniu wzoru $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$,
   (g) o wyrazie ogólnym postaci ilorazu wyrażeń z potęgami, którego granicę oblicza się poprzez wyłączenie wspólnej potęgi przed nawias i skrócenie jej (analogicznie jak w przypadku ilorazu wielomianów),
   (h) którego granicę oblicza się korzystając z *twierdzenia o trzech ciągach*,
   (i) w którego wyrazie ogólnym występuje n-ta suma częściowa szeregu geometrycznego lub arytmetycznego,
   (j) którego wyraz ogólny da się sprowadzić do wyrażenia $\left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}$ w pewnej potędze, przy zachowaniu założeń, gwarantujących zbieżność wyrażenia do e,
   (k) $\{a_n\}$, w przypadku którego o istnieniu granicy wnioskuje się na podstawie warunku $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ dla pewnego $q \in \mathbb{R}$;
2. Znajomość twierdzenia o ciągłości działań arytmetycznych;

Oznaczenia i terminologia

1. **Nieskończony ciąg liczbowy** Jeżeli każdej liczbie naturalnej n zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista u_n, to mówimy, że został określony *nieskończony ciąg liczbowy*.
2. **Wyraz ciągu** Liczby $u_1, u_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami ciągu*.

3. **Wyraz ogólny ciągu** Symbol u_n nazywamy *wyrazem ogólnym ciągu*.

4. **Granica skończona** Ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granicę* g (*dąży do granicy* g), jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N, że dla każdego $n \geq N$ zachodzi nierówność
$$|u_n - g| < \varepsilon.$$
Notacja:
$$u_n \to g, \text{ gdy } n \to \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = g.$$

5. **Granica nieskończona** ∞ Ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granicę* ∞ (plus nieskończoność) (*dąży do plus nieskończoności*), jeżeli dla każdej liczby $M \geq 0$ można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N, że dla każdego $n \geq N$ zachodzi nierówność
$$u_n > M.$$
Notacja:
$$u_n \to \infty, \text{ gdy } n \to \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \infty.$$

6. **Granica nieskończona** $-\infty$ Ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granicę* $-\infty$ (minus nieskończoność) (*dąży do minus nieskończoności*), jeżeli dla każdej liczby $M \geq 0$ można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N, że dla każdego $n \geq N$ zachodzi nierówność
$$u_n < -M.$$
Notacja:
$$u_n \to -\infty, \text{ gdy } n \to \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty.$$

7. **Nie każdy ciąg nieskończony ma granicę** Na przykład ciąg $1, 0, 1, 0, \ldots$ nie ma granicy.

8. **Ciąg zbieżny** Ciąg nieskończony, który ma granicę skończoną, nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

9. **Ciąg rozbieżny** Ciąg nieskończony, który nie ma granicy skończonej, nazywamy *ciągiem rozbieżnym*. W szczególności jeżeli ciąg $\{u_n\}$ dąży do $+\infty$, to mówimy, że jest *rozbieżny do plus nieskończoności* i podbnie mówimy o ciągu *rozbieżnym do minus nieskończoności*.

10. **Ciąg geometryczny** Ciąg geometryczny, to ciąg liczbowy $\{a_n\}$, którego każdy kolejny wyraz od drugiego począwszy jest iloczynem wyrazu poprzedniego i pewnej stałej q nazwanej *ilorazem ciągu*:
$$a_n = q \cdot a_{n-1} \text{ dla } n > 1.$$

11. **Ciąg arytmetyczny** Ciąg arytmetyczny, to ciąg liczbowy $\{a_n\}$, w którym każdy kolejny wyraz od drugiego począwszy jest sumą wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego oraz ustalonej liczby r zwanej *różnicą ciągu*:
$$a_n = a_{n-1} + r \text{ dla } n > 1.$$

Twierdzenia

1. **Ciągłość działań arytmetycznych** Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab,$$

   oraz przy założeniu, że $b\neq 0$ i $b_n\neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

2. Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej n, to granica takiego ułamka przy $n\to\infty$ równa się stosunkowi współczynników przy najwyższych potęgach n.

3. Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n niż licznik, to granica takiego ułamka przy $n\to\infty$ równa się zeru.

4. Jeżeli licznik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n niż mianownik, to wartość bezwzględna ułamka dąży do nieskończoności.

5. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a, to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a, \quad \text{gdzie} \quad a_n\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n}=\sqrt[p]{a}.$$

6. Dla ciągu $a_n=\sqrt[n]{a}$, gdzie $a>0$, zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

7. Dla ciągu $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2,71828\ldots$$

8. Dla ciągu $\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}$, zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}=e\approx 2,71828\ldots, \qquad \text{o ile} \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=0 \text{ i } a_n\neq 0.$$

9. Dla ciągu $a_n=\sqrt[n]{n}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

10. Jeżeli dla ciągu $\{a_n\}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q<1,$$

    to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

11. Jeżeli dla ciągu $\{a_n\}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q>1,$$

    to $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, a więc ciąg jest rozbieżny.

12. Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n = q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1 < q \leq 1$, przy czym:
    - Jeżeli $-1 < q < 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
    - Jeżeli $q = 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.
13. **Twierdzenie o trzech ciągach** Jeżeli istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$, $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ spełniają dla $n \geq n_0$ nierówność
$$a_n \leq u_n \leq b_n$$
i jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mają wspólną granicę g, tzn.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g,$$
to ciąg $\{u_n\}$ ma tę samą granicę, czyli
$$\lim_{n\to\infty} u_n = g.$$
14. **Suma pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego** Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, a $q \in \mathbb{R}$ jego ilorazem. Suma pierwszych $n \in \mathbb{N}$ wyrazów ciągu geometrycznego dana jest wzorem
$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \begin{cases} a\frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1, \\ na & \text{dla} \quad q = 1. \end{cases}$$
15. **Suma pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego** Dany jest ciąg arytmetyczny $a_1, a_2, \ldots$ Suma pierwszych $n \in \mathbb{N}$ wyrazów ciągu arytmetycznego dana jest wzorem
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Przydatne wzory

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
2. $a + b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$,
3. $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$,
4. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$,
5. $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$,
6. $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3-b^3}{a-b}$,
7. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
8. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
9. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Zadania

1. Obliczyć granicę ciągu stałego
    (a) $a_n = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,
    (b) $b_n = -1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,
    (c) $c_n = a \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.
2. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{2n^2-3n+5}{3+7n-6n^2}$,

(b) $u_n = \frac{n}{n+1}$,

(c) $u_n = \frac{4n-3}{6-5n}$,

(d) $u_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$,

(e) $u_n = \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$,

(f) $u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$,

(g) $u_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$,

(h) $u_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2$,

(i) $u_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3$,

(j) $u_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$,

(k) $u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$,

(l) $u_n = \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$,

(m) $u_n = \sqrt[3]{\frac{n-1}{8n+10}}$,

(n) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$,

(o) $u_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{4n^3-5n+1}{3n^5+2n^2-4}$,

(b) $u_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}$,

(c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+7n}-2n}$,

(d) $u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$,

(e) $u_n = \frac{\sqrt{n}-2}{3n+5}$.

4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{2n^2-5n+8}{15n-3}$,

(b) $u_n = \frac{n-10}{3}$,

(c) $u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15}$.

5. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$,

(b) $u_n = \frac{(-0{,}8)^n}{2n-5}$,

(c) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$.

6. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $a_n = (0,99)^n$.

7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \sqrt{4n^2+5n-7} - 2n$,

(b) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$,

(c) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$,

(d) $u_n = n - \sqrt{n^2+5n}$,

(e) $u_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$,

(f) $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}$.

8. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}$,

(b) $u_n = n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$,

(c) $u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$.

9. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{3^{2n+1}-7}{9^n+4}$,

(b) $u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$,

(c) $u_n = \frac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$,

(d) $u_n = \frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$,

(e) $u_n = \frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}$,

(f) $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$,

(g) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

10. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$,

(b) $u_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$,

(c) $u_n = \sqrt[n]{10^n+9^n+8^n}$,

(d) $u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$,

(e) $u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

11. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$, (b) $u_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$, (c) $u_n = \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$,

12. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$, (b) $u_n = \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$, (c) $u_n = \frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \ldots + \frac{n}{n^k}$.

13. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

(a) $u_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$, (d) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, (g) $u_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$,

(b) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, (e) $u_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, (h) $u_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$,

(c) $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$, (f) $u_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$, (i) $u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

14. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

15. Czy ciąg nieograniczony zawsze zmierza do $+\infty$ lub $-\infty$?

16. Podać przykład ciągu ograniczonego, a rozbieżnego.

Bibliografia

1. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski