Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Analiza matematyczna – granica funkcji

ĆWICZENIA

granica funkcji, podstawowe definicje i własności, obliczanie granic funkcji

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie,
2. Definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie,
3. Granica niewłaściwa funkcji,
4. Granica jednostronna,
5. Granica w nieskończoności,
6. Własności granic,
7. Twierdzenie o trzech funkcjach.
8. Reguła de L'Hospitala.

Oznaczenia i terminologia

1. Weźmy pod uwagę funkcję $y = f(x)$ określoną w otoczeniu pewnego punktu x_0 z wyjątkiem może samego punktu x_0. W punkcie x_0 funkcja może, lecz nie musi być określona.

2. **Granica funkcji w punkcie x_0 – definicja Heinego** Liczbę g nazywamy *granicą funkcji w punkcie* x_0, co zapisujemy w postaci

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \qquad \text{lub} \qquad f(x) \to g, \quad \text{gdy} \quad x \to x_0,$$

jeżeli dla każdego ciągu wartości argumentu $\{x_n\}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach różnych od x_0 odpowiadający ciąg wartości funkcji $\{f(x_n)\}$ zdąża do granicy g, tzn. że

$$\text{jeżeli} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \text{wówczas} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

3. **Granica funkcji w punkcie x_0 – definicja Cauchy'ego** Liczbę g nazywamy *granicą funkcji* $y = f(x)$ *w punkcie* $x = x_0$, jeżeli dla dowolnej (choćby bardzo małej) liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę $\delta > 0$ (zależną od wyboru ε), że dla wszystkich $x \neq x_0$ i spełniających nierówność

$$|x - x_0| < \delta$$

zachodzi nierówność

$$|f(x) - g| < \varepsilon,$$

tzn. jeżeli dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 wartości funkcji różnią się dowolnie mało od g. Pierwsza nierówność oznacza, że punkt x leży w otoczeniu punktu x_0 o promieniu δ, a druga nierówność oznacza, że odpowiadająca wartość funkcji $f(x)$ znajduje się w otoczeniu g o promieniu ε.

4. **Granica niewłaściwa funkcji** Mówimy, że funkcja dąży do $+\infty$, gdy $x \to x_0$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zmierzającego do x_0, o wyrazach różnych od x_0, odpowiedni ciąg wartości funkcji $\{f(x_n)\}$ zdąża do $+\infty$, tzn. że, gdy
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \text{gdzie} \qquad x_n \neq x_0,$$
to
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty.$$
Zapisujemy wtedy
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$
Podobnie definiujemy symbol
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

5. **Granica jednostronna** Niekiedy przy badaniu funkcji w otoczeniu punktu x_0 ograniczamy się jedynie do wartości argumentu $x > x_0$ lub do wartości $x < x_0$, tzn. badamy zachowanie się funkcji tylko w prawej, ewentualnie w lewej połowie otoczenia punktu x_0. Mówimy, że liczba g jest *granicą prawostronną* funkcji w punkcie x_0, co zapisujemy
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = g,$$
jeżeli dla każdego ciągu wartości argumentu $\{x_n\}$, zmierzającego do x_0 z prawej strony, tzn. o wyrazach $x_n > x_0$, odpowiedni ciąg $f(x_n)$ wartości funkcji zmierza do g. Podobnie określamy *granicę lewostronną* i oznaczamy ją
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = g.$$

6. Można także mówić o granicy niewłaściwej prawostronnej i lewostronnej.

7. Jeżeli funkcja posiada granicę, to istnieje granica lewostronna i prawostronna i obie są równe granicy funkcji.

8. Jeżeli funkcja posiada obie granice jednostronne w punkcie x_0 i są one sobie równe, to funkcja posiada granicę w punkcie x_0.

9. **Granica w nieskończoności** Mówimy, że funkcja dąży do granicy g, gdy x zmierza do $+\infty$, co zapisujemy
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g,$$
jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$, zdążającego do $+\infty$, $\{f(x_n)\}$ zdąża do g. Podobnie określamy symbol
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g.$$

10. Można mówić także o granicy niewłaściwej w $+\infty$ lub w $-\infty$.

11. **Granica niewłaściwa funkcji** $+\infty$ Mówimy, że funkcja $f(x)$ dąży do $+\infty$ przy $x \to +\infty$, co zapisujemy
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
jeżeli dla dowolnie obranej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $K > 0$, żeby było $f(x) > M$ dla każdej wartości $x > K$.

12. **Granica niewłaściwa funkcji** $-\infty$ Mówimy, że funkcja $f(x)$ dąży do $-\infty$ przy $x \to +\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

jeżeli dla dowolnie obranej liczby $M < 0$ istnieje taka liczba $K > 0$, żeby było $f(x) < M$ dla każdej wartości $x > K$.

Twierdzenia

1. **Własności granic funkcji** Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oraz $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = b$, to

   (a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + \varphi(x)] = a + b$, (b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - \varphi(x)] = a - b$, (c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = a \cdot b$.

   (d) W przypadku, gdy $\varphi(x)$ jest funkcją stałą, tj. $\varphi(x) \equiv m$, twierdzenie to przybiera postać: Jeżeli m jest dowolną liczbą, to

   $$\lim_{x \to x_0} [m \cdot f(x)] = m \cdot a.$$

   (e) Przy założeniu dodatkowym, że $b \neq 0$, otrzymujemy

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b}.$$

   (f) Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ oraz $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$ (lub $-\infty$), to

   $$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty \qquad \text{(lub } -\infty\text{)},$$

   $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \begin{cases} \infty & \text{lub } -\infty, \quad \text{gdy } a > 0, \\ -\infty & \text{lub } \infty, \quad \text{gdy } a < 0, \end{cases}$$

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

   (g) Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$ i $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ oraz $\varphi \neq 0$ dla $x \neq x_0$, to

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } \varphi(x) > 0 \text{ i } a > 0, \\ -\infty, & \text{gdy } \varphi(x) > 0 \text{ i } a < 0, \\ -\infty, & \text{gdy } \varphi(x) < 0 \text{ i } a > 0, \\ +\infty, & \text{gdy } \varphi(x) < 0 \text{ i } a < 0, \end{cases}$$

   (h) Jeżeli $f(x) \leq \varphi(x)$, to $a \leq b$.

2. **Twierdzenie o trzech funkcjach** Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = a$ i $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, to

   $$\lim_{x \to x_0} g(x) = a.$$

3. **Reguły de L'Hospitala**

(a) Jeżeli każda z funkcji ciągłych $f(x)$ i $g(x)$ posiada pochodną w otoczeniu punktu $x = a$, z wyjątkiem być może samego punktu a, przy czym w otoczeniu tym $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ i gdy ponadto spełnione są warunki

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0,$$

to jeżeli istnieje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje również $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Powyższe twierdzenie zachodzi także dla przypadku, gdy

$$lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

(c) Powyższe twierdzenie zachodzi także dla przypadku, gdy $x \to \pm\infty$.

(d) Jeżeli przy wyznaczaniu granicy stosunku $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ natrafiamy na przypadek $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, to regułę de L'Hospitala stosujemy do $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tzn. znajdujemy granicę ilorazu $\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

(e) W wielu wypadkach wyrażenie, którego granicę mamy odnaleźć, trzeba najpierw w pewien sposób przekształcić, aby móc następnie zastosować regułę de L'Hospitala.

(f) Twierdzenie de L'Hospitala nie da się odwrócić. Może się mianowicie zdarzyć, że iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ ma granicę, natomiast $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ granicy nie posiada.

Zadania

1. Wyznaczyć ciąg wartości funkcji $y = x^2 + 1$ odpowiadający następującemu ciągowi wartości argumentu:

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$

(b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots,$

(c) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\},$

(d) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right\},$

(e) $\{x_n\} = \left\{2 - \frac{1}{n}\right\},$

(f) $\{x_n\} = \left\{2 + \frac{1}{n}\right\},$

(g) $\{x_n\} = \left\{\frac{2n}{n+1}\right\}.$

2. Udowodnić na podstawie definicji granicy, że

(a) $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1,$

(b) $\lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5,$

(c) $\lim_{x\to +\infty}(x^2+1) = +\infty,$

(d) $\lim_{x\to -\infty}(x^2+1) = +\infty,$

(e) $\lim_{x\to 1}(3x+1) = 4.$

3. Obliczyć granice

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right),$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right),$

(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \cos x\right),$

(d) $\lim_{x\to 0}(x \cdot \operatorname{ctg} x),$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x},$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x},$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x},$

(h) $\lim_{x\to 3}(2x^3 + 5x + 1),$

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4},$

(j) $\lim_{x\to \infty} \frac{x-2}{x^2-4},$

(k) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x-1}{x^3-20},$

(l) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h},$

(m) $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x^3}\right),$

(n) $\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x^3}\right),$

(o) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}$,

(q) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|}$,

(r) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|}$,

(s) $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$,

(t) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}$.

4. Obliczyć granice

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x+2}$,

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$,

(c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x+1}$,

(d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$,

(e) $\lim_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3}$,

(f) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$,

(g) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$,

(h) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^5+32}$,

(i) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$,

(j) $\lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{2x^2-50}$,

(k) $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$,

(l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1}$,

(m) $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x^2-9}$,

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$ (**wskazówka:** podstawić $1+mx=t^3$),

(o) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, gdzie $n\in\mathbb{N}$.

5. Obliczyć granice

(a) $\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3\sin 2x}$,

(f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$,

(g) $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}$,

(h) $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi}$,

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$,

(j) $\lim_{x\to 8} \frac{8-x}{\sin\left(\frac{1}{8}\pi x\right)}$ (**wskazówka:** użyć wzoru $\sin x=\sin(\pi-x)$),

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$,

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$,

(m) $\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$,

(n) $\lim_{x\to \frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x-\cos\frac{1}{4}\pi}{\sin x-\sin\frac{1}{4}\pi}$,

(o) $\lim_{x\to 1} \frac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$,

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ (**wskazówka:** podstawić $\operatorname{arc\,tg} x=\alpha$),

(q) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$,

(r) $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$,

(s) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$,

(t) $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{n}{x}}$.

6. Obliczyć granice korzystając z reguły de L'Hospitala

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8}$,

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}$,

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^5}$,

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x-x}$ (**wskazówka:** uwaga na znak wyrażenia $\cos x-1$),

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}$,

(i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-1}{1+x^2}$,

(j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x}, a>1$,

(k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$,

(l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}, n>0$,

(m) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$,

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x-\sin x}$,

(o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\frac{x-1}{x+1}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x}$,

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$,

(q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arc\,ctg} x}$,

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-e^x)}{\operatorname{ctg} x}$,

(s) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x-\operatorname{tg} x}$,

(t) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}$ (**wskazówka:** podstawić $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}(2x)$),

(u) $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^n}, a>1$,

(v) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$,

(w) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$,

(x) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$,

(y) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg} x}\right)$

7. Obliczyć granice korzystając z reguły de L'Hospitala

(a) $\lim_{x\to 0} x^x$,

(b) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

(c) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,

(d) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$,

(e) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$,

(f) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

Bibliografia

1. *Matematyka część I* W. Wrona

2. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski