Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

pochodna funkcji, podstawowe określenia, obliczanie pochodnych

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia:
   (a) pochodna funkcji,
   (b) funkcja różniczkowalna,
   (c) pochodna jednostronna.

2. Sposoby obliczania pochodnych:
   (a) pochodna sumy,
   (b) pochodna iloczynu kilku czynników,
   (c) pochodna ilorazu,
   (d) pochodna funkcji odwrotnej,
   (e) pochodna funkcji złożonej,
   (f) pochodna logarytmiczna.

3. Spis podstawowych wzorów.

Oznaczenia, terminologia, twierdzenia

1. **Definicja pochodnej**

   (a) **Pochodna funkcji** *Pochodną funkcji* $y = f(x)$ w punkcie x nazywamy granicę ilorazu przyrostu Δy funkcji przez odpowiadający mu przyrost Δx zmiennej niezależnej, gdy ten ostatni zmierza do zera. Dla oznaczenia pochodnej używamy symbolu y' lub $f'(x)$, tzn.

   $$y' = f'(x) = \mathrm{lin}_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

   Gdy granica ta nie istnieje, to funkcja nie posiada pochodnej.

   (b) **Różniczka** $\mathrm{d}y$ *Różniczką* $\mathrm{d}y$ funkcji $y = f(x)$ nazywamy iloczyn pochodnej tej funkcji przez dowolny przyrost $\mathrm{d}x$ zmiennej niezależnej:

   $$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

   (c) Różniczka funkcji przedstawia główną część przyrostu funkcji.

(d) Różniczka funkcji znajduje często zastosowanie w przypadku, gdy wielkości występujące we wzorze, pochodzące z pomiarów, nie są dokładne, lecz podane z pewnym błędem. Wówczas błąd wielkości obliczonej ze wzoru daje się wyznaczyć za pomocą różniczki.

(e) **Różniczkowanie** Odnajdywanie pochodnej nazywamy *różniczkowaniem*.

(f) **Funkcja różniczkowalna w punkcie** Funkcję posiadającą pochodną w punkcie x nazywamy *różniczkowalną* w tym punkcie.

(g) Jeżeli dana funkcja jest różniczkowalna we wszystkich punktach pewnego przedziału, to jej pochodna jest funkcją określoną w tym przedziale.

(h) Pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ dla każdej wartości x jest równa tangensowi kąta α nachylenia do osi odciętych stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie odciętej x,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

(i) Gdy w punkcie x istnieje pochodna, to wtedy mamy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0,$$

a zatem funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie x.

(j) Funkcja posiadająca pochodną w pewnym punkcie, jest w tym punkcie ciągła. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

2. **Pochodne jednostronne**

(a) **Pochodna prawostronna** Rozważając granicę ilorazu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy przyrost Δx zmierza do zera przez wartości dodatnie, dochodzimy do pojęcia *pochodnej prawostronnej* funkcji $f(x)$ w punkcie x, tj.

$$f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(b) **Pochodna lewostronna** Podobnie, gdy $\Delta \to 0$ przez wartości ujemne, to granicę

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

nazywamy *pochodną lewostronną* funkcji $f(x)$ w punkcie x.

(c) Z powyższych określeń wynika, że pochodna $f'(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie pochodne jednostronne i są sobie równe.

3. **Obliczanie pochodnej** Niech funkcje $u(x)$, $v(x)$ i $w(x)$ posiadają pochodne w punkcie x.

(a) **Pochodna sumy** Pochodna sumy jest równa sumie pochodnych:

$$(u + v)' = u' + v',$$

(b) **Pochodna iloczynu** Pochodna iloczynu dwóch funkcji jest równa sumie iloczynu pierwszej przez pochodną drugiej i iloczynu drugiej przez pochodną pierwszej funkcji:

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

(c) **Czynnik stały** Czynnik stały można wyłączyć przed znak różniczkowania:

$$\big(c \cdot u(x)\big)' = c \cdot u'(x).$$

(d) **Pochodna iloczynu kilku czynników** Pochodna iloczynu kilku czynników jest równa sumie iloczynów pochodnej każdego z czynników przez czynniki pozostałe:

$$(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw.$$

(e) **Pochodna ilorazu** Pochodna ilorazu funkcji $u(x)$ i $v(x) \neq 0$ istnieje, gdy istnieją pochodne $u'(x)$ i $v'(x)$, i zachodzi wzór

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

(f) Jeżeli mianownik ułamka jest stały, to mamy

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'c - u \cdot 0}{c^2} = \frac{u'}{c}.$$

(g) Jeżeli licznik ułamka jest wielkością stałą, to mamy

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{0 \cdot v - c \cdot v'}{v^2} = -\frac{cv'}{v^2}.$$

(h) W szczególności gdy $c = 1$, otrzymujemy stąd

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}.$$

(i) **Pochodna funkcji odwrotnej** Weźmy pod uwagę funkcję monotoniczną i ciągłą

$$y = f(x)$$

i załóżmy, że posiada ona pochodną różną od zera dla pewnej wartości x. Niech $x = \varphi(y)$ będzie funkcją odwrotną. Pochodna funkcji odwrotnej jest równa odwrotności pochodnej funkcji danej ***przy założeniu, że pochodna funkcji danej jest różna od zera***:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{lub} \qquad f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

(j) **Pochodna funkcji złożonej** Jeżeli

$$y = f(u) \qquad \text{i} \qquad u = g(x)$$

są funkcjami różniczkowalnymi swoich argumentów i jeżeli ma sens funkcja złożona

$$y = f\big(g(x)\big),$$

to jest ona różniczkowalna i zachodzi wzór

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'(u) \cdot g'(x), \qquad \text{gdzie} \qquad u = g(x),$$

tzn. pochodna funkcji złożonej jest równa iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej przez pochodną funkcji wewnętrznej.

(k) **Pochodna logarytmiczna** Istnieje prosty związek między pochodną funkcji i pochodną jej logarytmu naturalnego. Weźmy mianowicie pod uwagę funkcję $y = f(x)$. Na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy wzór

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y},$$

dla $y > 0$. Wyrażenie $\frac{y'}{y}$ nazywamy *pochodną logarytmiczną* funkcji y. Z ostatniego związku otrzymujemy

$$y' = y \cdot (\ln y)'.$$

(l) Czasem łatwiej jest obliczyć pochodną logarytmu funkcji, niż pochodną funkcji – stosujemy wtedy ostatni wzór.

4. **Pochodne wyższych rzędów**

(a) Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną $f'(x)$, to ta pochodna jest pewną nową funkcją, która także może posiadać pochodną.

(b) **Druga pochodna (pochodna drugiego rzędu)** Pochodną pochodnej oznaczamy $f''(x)$ i nazywamy ją *drugą pochodną* funkcji $f(x)$ lub *pochodną drugiego rzędu* funkcji $f(x)$. Mamy więc

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)'.$$

(c) **Trzecia pochodna (pochodna trzeciego rzędu)** Pochodną drugiej pochodnej oznaczamy $f'''(x)$ i nazywamy ją *trzecią pochodną* funkcji $f(x)$ lub *pochodną trzeciego rzędu* funkcji $f(x)$. Mamy więc

$$f'''(x) = \big(f''(x)\big)'.$$

(d) **n-ta pochodna (pochodna rzędu n)** Podobnie *n-tą pochodną* funkcji $f(x)$ lub *pochodną rzędu n* oznaczamy $f^{(n)}(x)$ i określamy jako pochodną $(n-1)$-szej pochodnej

$$f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)'.$$

5. **Spis podstawowych wzorów**

(a) $(c)' = 0$, gdzie c jest stałą,

(b) $\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$,

(c) $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$,

(d) $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

(e) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$, $g(x) \neq 0$,

(f) $f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$,

(g) $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, dla $x = \varphi(y)$ funkcji odwrotnej do $y = f(x)$, o ile $f'(x) \neq 0$,

(h) $(x)' = 1$,

(i) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, gdzie $x > 0$,

(j) $\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, gdzie $x > 0$,

(k) $(\sin x)' = \cos x$,

(l) $(\cos x)' = -\sin x$,

(m) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, gdzie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(n) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, gdzie $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(o) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, gdzie $x > 0$,

(p) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, gdzie $x > 0$,

(q) $(e^x)' = e^x$,

(r) $(a^x)' = a^x \ln a$,

(s) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, gdzie $|x| < 1$,

(t) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, gdzie $|x| < 1$,

(u) $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

(v) $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Przydatne wzory i fakty

1. **Silnia liczby naturalnej n** Iloczyn wszystkich liczb naturalnych dodatnich nie większych niż $n \in \mathbb{N}$ oznaczany jest symbolem $n!$ i nazywany *silnią*:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

2. **Współczynnik dwumianowy (symbol Newtona)** Wyrażenie $\binom{n}{k}$ oznacza *współczynnik dwumianowy* (*symbol Newtona*) zdefiniowany następująco

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

3. **Dwumian Newtona** *Dwumianem Newtona* nazywamy wzór

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

4. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

5. **Tożsamości trygonometryczne**

   (a) $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$,

   (b) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$.

6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Zadania

1. Obliczyć z definicji pochodne funkcji

   (a) $y = -5$,
   (b) $y = \pi$,
   (c) $y = c$, gdzie c jest stałą,
   (d) $y = x$,
   (e) $y = 5x$,
   (f) $y = ax + b$,
   (g) $y = x^2$,
   (h) $y = x^2 + 3x + 1$,
   (i) $y = x^3$,
   (j) $y = x^n$,
   (k) $y = x^{17}$,
   (l) $y = \frac{1}{x}$,
   (m) $y = \frac{1}{x^2}$,
   (n) $y = \sqrt{x}$, gdzie $x > 0$,
   (o) $y = \sqrt[3]{x}$,
   (p) $y = \sin x$,
   (q) $y = \cos x$,
   (r) $y = \ln x$,
   (s) $y = \log_a x$.

2. Obliczyć z definicji wartość pochodnej funkcji $y = x^2$ w punkcie

   (a) $x = 1$,
   (b) $x = -3$.

3. Czy suma dwóch funkcji może posiadać pochodną w punkcie, w którym funkcje składowe pochodnych nie posiadają?

4. Obliczyć pochodne

   (a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6$,
   (b) $y = ax^3 + \frac{b}{x} + c$,
   (c) $y = 9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$,
   (d) $y = \sqrt[5]{x^2}$,
   (e) $y = 3\sqrt[3]{x} - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}$,
   (f) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}$,
   (g) $y = x^3\sqrt{x}$,
   (h) $y = (2\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^5} + x^2)$,
   (i) $y = (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + \sqrt{x})$,
   (j) $y = \frac{3}{3x-2}$,
   (k) $y = \frac{3x^2}{7x^5 - x + 2}$,
   (l) $y = 2\frac{x+1}{x-1}$,

(m) $y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$,
(n) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$,
(o) $y=\left(\frac{1}{x}+4\right)^4$,
(p) $y=\sqrt{x^2-4}$,
(q) $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$,
(r) $y=\frac{1}{\sqrt{3(2-x^3)^4}}$,
(s) $y=\frac{1}{(b-x^p)^n}$,
(t) $y=\frac{1}{x-\sqrt{a^2+x^2}}$,
(u) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,
(v) $y=\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$,
(w) $y=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$,
(x) $y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

5. Obliczyć pochodne

(a) $y=\cos\frac{x}{a}$, $a\neq 0$,
(b) $y=a\sin\frac{a}{x}$,
(c) $y=\sin^2(3t)$,
(d) $y=\frac{1}{\cos^4 x}$,
(e) $y=\frac{\sin x+\cos x}{2\sin(2t)}$,
(f) $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$,
(g) $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$,
(h) $y=\operatorname{tg}^4\sqrt{x}$,
(i) $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$,
(j) $y=\cos^2\sqrt{\frac{1}{x}}$,
(k) $y=\frac{\sin^2 x}{\cos^7 x}-\frac{2}{5\cos^5 x}$,
(l) $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{x+2\sqrt{x}}}$,
(m) $y=\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$,
(n) $y=(4\sin x-8\sin^3 x)\cos x$,
(o) $y=\operatorname{arc\,tg} 3x$,
(p) $y=\arcsin(1-x)$,
(q) $y=\arcsin\sqrt{x^3}$,
(r) $y=\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $0<x<1$,
(s) $y=\arcsin(2x\sqrt{1-t^2})$.

6. Obliczyć pochodne

(a) $y=e^{3x}$,
(b) $y=e^x f(x)$,
(c) $y=e^{\sin x}$,
(d) $y=e^{\cos^2 x}$,
(e) $y=(x^3-3x^2+6x-6)e^x$,
(f) $y=\frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$.

7. Obliczyć pochodne

(a) $y=5^x+2^x$,
(b) $y=2\cdot 7^x-1$,
(c) $y=a^{2x}x^n$,
(d) $y=7\cdot 5^{10x}$.

8. Obliczyć pochodne

(a) $y=5\ln 10x$,
(b) $y=3\frac{5}{x-2}$,
(c) $y=2\ln\frac{3}{x+\sqrt{x^2-4}}$,
(d) $y=\ln\left(\frac{a+b\operatorname{tg} x}{a-b\operatorname{tg} x}\right)$,
(e) $y=\ln(\cos\frac{1}{2}x)^2$,
(f) $y=\ln\big(\ln(\ln x)\big)$, $x>e$,
(g) $y=\ln\sin x$,
(h) $y=\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$,
(i) $y=\ln(e^{mx}+e^{-mx})$,
(j) $y=15\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+\frac{\cos x}{\sin^4 x}(8\cos^4 x-25\cos^2 x+15)$.

9. Obliczyć pochodne

(a) $y = \log_x \ln x$, (b) $y = \log_x a$.

(**Wskazówka:** zastosować wzór na zamianę podstawy logarytmu.)

10. Obliczyć pochodne korzystając z pochodnej logarytmicznej

(a) $y = x^{5x}$, $x > 0$,

(b) $y = x^{\sin x}$, $x > 0$,

(c) $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$, $a > 0$, $x > 0$,

(d) $y = a^{\ln x}$, $a > 0$, $x > 0$,

(e) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$, $x > 0$, wyjaśnić wynik,

(f) $y = (\sin x)^{\cos x}$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$,

(g) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$,

(h) $y = (\cos x)^{ctgx}$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$,

(i) $y = x^{e^x}$, $x > 0$,

(j) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$,

(k) $y = x^{x^x}$, $x > 0$,

(l) $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$.

11. Czy funkcja $y = x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ posiada wszystkie pochodne w całym swym obszarze określoności?

12. Znaleźć drugą pochodną funkcji:

(a) $y = x \sin(2x)$, (b) $y = \frac{1}{e^{-x}+e^x}$, (c) $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, (d) $y = \operatorname{tg}^2 x$.

13. Znaleźć trzecią pochodną funkcji:

(a) $y = 2x^6 - x^3 + 2x - 3$, (b) $y = e^{-x^2}$.

14. Dla funkcji

(a) $y = \frac{x}{x-1}$ znaleźć $f''(0)$,

(b) $y = \ln|1 - x^2|$ znaleźć $f''(2)$,

(c) $y = \operatorname{arc\,tg} 2x$ znaleźć $f'''\left(\frac{1}{2}\right)$,

(d) $y = xe^{-x}$ znaleźć $f''(0)$.

15. Podać i udowodnić wzór na n-tą pochodną funkcji:

(a) $y = e^{ax}$,

(b) $y = a^x$,

(c) $y = \frac{1}{x}$,

(d) $y = \ln(1 + x)$,

(e) $y = \sin 2x$,

(f) $y = \cos x$.

16. Obliczyć, jaki kąt z osią Ox tworzy styczna do paraboli $y = x^2 - 3x + 8$ w punkcie $x = 1$.

17. Obliczyć, w jakich punktach styczna do linii $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ jest równoległa do osi Ox.

Bibliografia

1. *Matematyka część I* W. Wrona

2. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski