Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

wzór Taylora, obliczanie przybliżonych wartości wyrażeń; zastosowanie pochodnych; badanie funkcji, poszukiwanie wartości najmniejszej i największej, przedziały wypukłości, punkty przegięcia

---

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia:
   (a) maksimum lokalne,
   (b) minimum lokalne,
   (c) maksimum właściwe,
   (d) minimum właściwe,
   (e) ekstremum,
   (f) najmniejsza/największa wartość funkcji w przedziale domkniętym,
   (g) punkt przegięcia krzywej,
   (h) kombinacja wypukła,
   (i) funkcja wypukła w przedziale,
   (j) funkcja wklęsła w przedziale,
   (k) asymptota.
2. Twierdzenia
   (a) twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie o wartości średniej),
   (b) twierdzenie Rolle'a,
   (c) warunek konieczny dla ekstremum,
   (d) warunki konieczne monotoniczności,
   (e) warunki dostateczne dla ekstremum,
   (f) wzór Taylora,
   (g) wzór Maclaurina.

Oznaczenia, terminologia, twierdzenia

1. **Twierdzenie Lagrange'a i jego zastosowania**
   (a) **Maksimum i minimum lokalne**
      i. Funkcja $y = f(x)$ ciągła w przedziale domkniętym $[a; b]$ ma w nim wartość największą i najmniejszą.

ii. **Maksimum lokalne** Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ posiada *maksimum lokalne* w punkcie x_0, jeżeli $f(x_0)$ jest dla wszystkich punktów x pewnego otoczenia punktu x_0 wartością największą, tzn. gdy istnieje takie $\delta > 0$, że

$$f(x) \leq f(x_0)$$

dla dowolnego x należącego do otoczenia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tzn. dla

$$|x - x_0| < \delta.$$

iii. **Maksimum właściwe** Maksimum nazywamy *właściwym*, jeżeli

$$f(x) < f(x_0) \qquad \text{dla} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

iv. **Minimum lokalne** Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ posiada *minimum lokalne* w punkcie x_0, jeżeli $f(x_0)$ jest dla wszystkich punktów x pewnego otoczenia punktu x_0 wartością najmniejszą, tzn. gdy istnieje takie $\delta > 0$, że

$$f(x) \geq f(x_0)$$

dla dowolnego x należącego do otoczenia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tzn. dla

$$|x - x_0| < \delta.$$

v. **Minimum właściwe** Minimum nazywamy *właściwym*, jeżeli

$$f(x) > f(x_0) \qquad \text{dla} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

vi. **Maksimum, minimum, ekstremum** Maksimum lokalne i minimum lokalne będziemy nazywali krótko *maksimum* i *minimum* lub ogólnie *ekstremum*.

vii. **Wartość najmniejsza (największa) w przedziale domkniętym** Funkcja ciągła w przedziale domkniętym może posiadać w nim kilka maksimów i kilka minimów lokalnych. Wartość najmniejszą funkcji w przedziale $[a; b]$ znajdziemy obliczając wartości wszystkich minimów i wartości na końcach przedziału $f(a)$ i $f(b)$ oraz biorąc najmniejszą z tych liczb. Podobnie odnajdujemy wartość największą biorąc największą z wartości maksimów oraz liczb $f(a)$ i $f(b)$.

viii. Jeżeli funkcja ciągła w otoczeniu punktu x_0 jest rosnąca z lewej strony punktu x_0, a malejąca z prawej strony punktu x_0, to w punkcie x_0 przybiera ona maksimum lokalne.

ix. Jeżeli funkcja ciągła w otoczeniu punktu x_0 jest malejąca z lewej strony punktu x_0, a rosnąca z prawej strony punktu x_0, to w punkcie x_0 przybiera ona minimum lokalne.

(b) **Warunek konieczny dla ekstremum**

i. **Warunek konieczny dla ekstremum** Jeżeli funkcja różniczkowalna $y = f(x)$ posiada w punkcie $x = x_0$ ekstremum, to pochodna w tym punkcie jest równa zeru:

$$f'(x_0) = 0.$$

ii. **Punkt przegięcia krzywej** Zerowanie się pierwszej pochodnej nie wystarcza do istnienia ekstremum. Np. funkcja $f(x) = x^3$ posiada w punkcie 0 pochodną równą zeru, jednak nie posiada w punkcie $x = 0$ ekstremum – punkt $x = 0$ jest *punktem przegięcia krzywej* $y = x^3$.

iii. Funkcja może posiadać ekstremum także w punkcie, w którym pochodna nie istnieje.

iv. Ekstremów funkcji należy szukać w punktach, w których albo pochodna przybiera wartość zero, albo nie istnieje.

(c) **Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a**

i. **Twierdzenie Lagrange'a (twierdzenie o wartości średniej)** Jeżeli funkcja $y = f(x)$, ciągła w przedziale domkniętym $[a;b]$, posiada pochodną w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału, to istnieje wewnątrz przedziału taki punkt ξ ($a < \xi < b$), że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

ii. **Twierdzenie Rolle'a** Jeżeli funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a;b]$ i posiadająca w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału pochodną, przyjmuje na końcach równe wartości, to co najmniej w jednym punkcie wewnętrznym przedziału $[a;b]$ pochodna zeruje się.

iii. Jeżeli nie jest spełnione twierdzenie o różniczkowalności, to teza twierdzenia Rolle'a nie musi zachodzić.

(d) **Wnioski z twierdzenia o wartości średniej**

i. Funkcja o pochodnej równej zeru w całym przedziale $[a;b]$ jest stała w tym przedziale.

ii. Dwie funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ posiadające tę samą pochodną w pewnym przedziale różnią się o stałą.

iii. Funkcja ciągła w przedziale $[a;b]$ o pochodnej stale dodatniej wewnątrz tego przedziału jest rosnąca w tym przedziale.

iv. Funkcja ciągła w przedziale $[a;b]$ o pochodnej stale ujemnej wewnątrz tego przedziału jest malejąca w tym przedziale.

(e) **Warunki konieczne monotoniczności** Funkcja różniczkowalna i rosnąca (malejąca) ma pochodną nieujemną (niedodatnią).

(f) **Warunek dostateczny dla ekstremum**

i. Funkcja ciągła w punkcie x_0 i posiadająca na lewo od punktu x_0 pochodną dodatnią, a na prawo ujemną przyjmuje w tym punkcie maksimum lokalne.

ii. Funkcja ciągła w punkcie x_0 i posiadająca na lewo od punktu x_0 pochodną ujemną, a na prawo dodatnią przyjmuje w tym punkcie minimum lokalne.

iii. Wystarczającym więc warunkiem na to, aby funkcja posiadała w punkcie x_0 ekstremum lokalne jest, aby pochodna zmieniła znak w punkcie x_0. W punkcie x_0 pochodna albo jest równa zeru, albo nie istnieje.

(g) **Drugi warunek dostateczny dla ekstremum** Jeżeli funkcja $y = g(x)$ posiada w otoczeniu punktu x_0 drugą pochodną ciągłą i jeżeli

$$f'(x_0) = 0,$$

to w punkcie x_0 funkcja przyjmuje maksimum, gdy $f''(x_0) < 0$, a minimum, gdy $f''(x_0) > 0$. W przypadku gdy $f''(x_0) = 0$, nic nie możemy powiedzieć bez dalszych badań.

2. **Wzór Taylora i jego zastosowania**

(a) **Wzór Taylora** Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada w przedziale domkniętym $[a;b]$ pochodne aż do rzędu n włącznie i jeżeli punkty x i $x + h$ należą do przedziału $[a;b]$, to zachodzi wzór

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n-1}f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

gdzie R_n nosi nazwę reszty wzoru Taylora i jest określane wzorem

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$$

przy czym o θ wiemy tylko, że $0 < \theta < 1$.

(b) **Wzór Maclaurina** Jeżeli we wzorze Taylora przyjmiemy $h = x$ oraz $x = 0$, to otrzymujemy wzór

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

gdzie

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta \cdot x) \qquad (0 < \theta < 1).$$

3. **Punkt przegięcia**

(a) *Punktem przegięcia* wykresu funkcji $y = f(x)$, gdy funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną ciągłą, nazywamy taki jej punkt, w którym styczna do krzywej przechodzi z jednej strony krzywej na drugą.

(b) Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma drugą pochodną ciągłą, to w punktach przegięcia wykresu funkcji druga pochodna $f''(x)$ jest równa zeru. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (np. druga pochodna funkcji x^4 jest równa zeru dla $x = 0$, a wykres funkcji nie ma punktu przegięcia w tym punkcie, tylko minimum).

(c) Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ dla $x < x_0$ jest ujemna (dodatnia), dla $x = x_0$ jest równa zeru, a dla $x > x_0$ jest dodatnia (ujemna), co wyrażamy krócej, mówiąc: druga pochodna przy przejściu przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to wykres funkcji $y = f(x)$ ma punkt przegięcia w punkcie x_0.

4. **Wypukłość i wklęsłość funkcji**

(a) **Wypukła kombinacja** Niech będą dane dwie liczby $x_1 < x_2$. *Wypukłą kombinacją* tych liczb nazywamy każdą liczbę postaci

$$x_a = ax_1 + (1-a)x_2 \quad \text{gdzie} \quad 0 \le a \le 1.$$

Każda wypukła kombinacja dwóch liczb leży na odcinku, którego końcami są te liczby.

(b) **Funkcja wypukła w przedziale** Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale $[b; c]$ jest *wypukła* w tym przedziale, jeżeli dla każdej liczby x_a postaci $x_a = ax_1 + (1-a)x_2$ przy dowolnych x_1 i x_2 z przedziału $[b; c]$ zachodzi nierówność

$$f(x_a) \le y_a, \quad \text{gdzie} \quad y_a = af(x_1) + (1-a)f(x_2).$$

(c) Warunek wypukłości funkcji $f(x)$ oznacza geometrycznie, że łuk wykresu funkcji $y = f(x)$ o końcach M_1 i M_2 znajduje się całkowicie poniżej cięciwy M_1M_2, jakiekolwiek obierzemy punkty M_1 i M_2 wykresu funkcji wypukłej.

(d) Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $[b; c]$ różniczkowalna, a jej pochodna jest w tym przedziale funkcją rosnącą, to funkcja $f(x)$ jest w przedziale $[b; c]$ funkcją wypukłą.

(e) Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $[b; c]$ dwukrotnie różniczkowalna, a jej druga pochodna przyjmuje w tym przedziale stale wartości dodatnie, to funkcja $f(x)$ jest w przedziale $[b; c]$ funkcją wypukłą.

(f) **Funkcja wklęsła w przedziale** Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale $[b;c]$ jest *wklęsła* w tym przedziale, jeżeli dla każdej liczby x_a postaci $x_a = ax_1 + (1-a)x_2$ przy dowolnych x_1 i x_2 z przedziału $[b;c]$ zachodzi nierówność

$$f(x_a) \geq y_a, \qquad \text{gdzie} \qquad y_a = af(x_1) + (1-a)f(x_2).$$

(g) Jeżeli funkcja jest wklęsła, to łuk wykresu funkcji znajduje się zawsze ponad cięciwą, łączącą końce łuku.

(h) Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale $[c;d]$ pierwszą pochodną malejącą lub drugą pochodną ujemną, to jest w tym przedziale funkcją wklęsłą.

(i) Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale $[b;c]$ wypukła (wklęsła) i dwukrotnie różniczkowalna, to w każdym punkcie wykresu funkcji styczna do wykresu znajduje się pod (nad) wykresem.

5. **Asymptota** Prostą p nazywamy *asymptotą* danej krzywej, jeżeli odległość punktu tej krzywej od prostej p dąży do zera, gdy punkt na krzywej oddala się nieskończenie od początku układu współrzędnych.

(a) **Asymptota pionowa** Zauważmy, że odległość punktu $P\big(x, f(x)\big)$ krzywej $y = f(x)$ od prostej $x = x_0$ wynosi

$$d = |x - x_0|,$$

a zatem $d \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \to x_0$. Punkt $P\big(x, f(x)\big)$ krzywej oddala się do nieskończoności przy $x \to x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f(x)|$ dąży do nieskończoności. W związku z tym prostą $x = x_0$ nazywamy *asymptotą pionową* krzywej $y = f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty.$$

(b) **Asymptota pochyła** Weźmy pod uwagę funkcję

$$y = f(x)$$

określoną w przedziale nieskończonym i prostą

$$y = mx + b.$$

Odległość d punktu $M\big(x, f(x)\big)$ krzywej od prostej jest wyrażona przez wzór

$$d = \frac{f(x) - mx - b}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Mianownik nie zależy od x, a zatem dla $x \to +\infty$ odległość $d \to 0$ wtedy, gdy $\big(f(x) - mx - b\big) \to 0$. Prostą $y = mx + b$ nazywamy *asymptotą pochyłą krzywej* $y = f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx - b\big) = 0.$$

(c) Jeżeli zachodzi powyższy wzór, to tym bardziej zachodzi związek

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - mx - b}{x} = 0,$$

tzn.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} = 0.$$

Ponieważ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0$, więc otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=0,$$

czyli

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m.$$

(d) Mamy oczywiście

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-mx\big)=b.$$

(e) **Kierunek asymptotyczny** O prostych posiadających współczynnik kierunkowy m mówimy, że posiadają *kierunek asymptotyczny*.

6. **Ogólny schemat badania kształtu krzywej** $y=f(x)$ Badamy:
   (a) obszar określoności funkcji,
   (b) czy funkcja jest parzysta, nieparzysta i periodyczna,
   (c) miejsca zerowe i znak funkcji,
   (d) ekstrema i przedziały monotoniczności,
   (e) punkty przegięcia i kierunek wypukłości,
   (f) asymptoty,
   (g) ujmujemy wyniki w tabelkę, w której uwzględniamy wszystkie otrzymane wartości charakterystyczne argumentu,
   (h) wykonujemy wykres.
7. Dla bardziej dokładnego wykonania wykresu można wyznaczyć dodatkowo
   (a) kilka punktów na krzywej (np. punkt jej przecięcia z osią y i inne),
   (b) współczynnik kierunkowy stycznej w pewnych punktach (np. w punktach przegięcia i innych).

Przydatne wzory i fakty

1. $5! = 120$, 2. $6! = 720$, 3. $7! = 5\,040$, 4. $8! = 40\,320$, 5. $9! = 362\,880$.

Zadania

1. Wyjaśnić, dlaczego do funkcji $y = 1-|x|$ nie można stosować twierdzenia Rolle'a, mimo że funkcja na końcach przedziału $[-2;2]$ przybiera te same wartości?
2. Czy funkcja monotoniczna w przedziale $[a;b]$ możne mieć wewnątrz tego przedziału ekstremum lokalne?
3. W których punktach funkcja $y=f(x)$ może posiadać ekstrema lokalne?
4. W których punktach może posiadać ekstrema lokalne funkcja

(a) $y = \cos x$,

(b) $y = x^4 - 2x^2 + 7$,

(c) $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

5. Sprawdzić, że twierdzenie Rolle'a zachodzi dla funkcji $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$ w przedziale $[-3; -1]$.

6. Napisać równanie stycznej do krzywej $y = x^2 - 4x + 5$ równoległej do cięciwy łączącej punkty o odciętych 2 i 4.

7. W jaki sposób badamy monotoniczność funkcji?

8. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji, której pochodna równa się stałej c, różnej od zera w całym przedziale określoności?

9. Pochodne dwóch funkcji są identyczne. Co można powiedzieć o wartościach i wykresach tych funkcji?

10. Udowodnić, że wyrażenie
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$
przyjmuje dla wszystkich wartości x z przedziału $-1 \leq x \leq 1$ tę samą stałą wartość i udowodnić, że ta stała wynosi $\frac{1}{2}\pi$.

11. Zbadać monotoniczność funkcji:

(a) $y = 3x + 5$,

(b) $y = 3x^2 + 5x - 6$,

(c) $y = x^2 - 4$,

(d) $y = \sin x$,

(e) $y = x^3 - 3x + 2$,

(f) $y = 3x^3 + 4,5x^2 - 4x + 1$,

(g) xe^{-x}.

12. Znaleźć ekstrema funkcji

(a) $y = x^2 - 3x + 2$,

(b) $y = -x^2 + x + 6$,

(c) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$,

(d) $y = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 1$,

(e) $y = 1 - \sin x$,

(f) $y = \frac{2x}{1+x^2}$,

(g) $y = xe^{-2x}$,

(h) $y = e^{-x}\sin x$.

13. Zastosować wzór Maclaurina do funkcji $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$. Obliczyć przybliżoną wartość $f(2)$ przyjmując różne n. Zaobserwować, jak zmieniają się reszty.

14. Zastosować wzór Maclaurina do funkcji $f(x) = e^x$. Obliczyć przybliżoną wartość liczby e przyjmując $n = 7$. W jakim przedziale mieści się błąd tego oszacowania? Ile cyfr po przecinku jest obliczonych w sposób pewny?

15. Jakie znaczenie ma ostatni wyraz wzoru Maclaurina (Taylora) przy obliczaniu przybliżonych wartości funkcji?

16. Zastosować wzór Maclaurina do funkcji:

(a) $f(x) = a^x$,

(b) $f(x) = \cos x$,

(c) $f(x) = \ln(1+x)$,

(d) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

17. Obliczyć $\sin\frac{1}{5}$ z dokładnością do $0,0001$, posługując się rozwinięciem funkcji sin w szereg potęgowy.

18. Obliczyć $\frac{1}{e}$ z dokładnością do $0,001$, posługując się rozwinięciem funkcji e^x w szereg Maclaurina.

19. Obliczyć $\sqrt[3]{30}$ z dokładnością do $0,001$, posługując się rozwinięciem funkcji $f(x) = (1+x)^s$ w szereg potęgowy.

20. Obliczyć $\sqrt{e}$ z dokładnością do $0,001$, posługując się rozwinięciem funkcji e^x w szereg potęgowy.

21. Obliczyć $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ z dokładnością do $0,001$, posługując się rozwinięciem funkcji e^x w szereg potęgowy.

22. Obliczyć $\sqrt[5]{250}$ z dokładnością do $0,001$, posługując się rozwinięciem funkcji $\sqrt[n]{1+x}$ w szereg potęgowy.

23. Obliczyć $\cos(0,3)$, gdzie kąt jest podany w radianach, z dokładnością do $0,001$, posługując się rozwinięciem funkcji $\cos x$ w szereg potęgowy.

24. Obliczyć $\sin 10^\circ$ z dokładnością do $0,00001$, posługując się rozwinięciem funkcji $\sin x$ w szereg potęgowy.

25. Jeżeli a jest liczbą całkowitą, dodatnią, spełniającą nierówność $a^n \leq A < a^{n+1}$, gdzie n jest liczbą naturalną, to do wyznaczenia przybliżonej wartości $\sqrt[n]{A}$ służyć może wzór

$$\sqrt[n]{A} \approx a + \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}}, \qquad \text{gdzie} \qquad x = A - a^n.$$

Udowodnić wzór, a następnie, korzystając z niego, obliczyć

(a) $\sqrt[5]{245}$, (b) $\sqrt[7]{129}$, (c) $\sqrt[9]{515}$, (d) $\sqrt[10]{1027}$.

26. Ile musimy wziąć wyrazów szeregu $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$, aby obliczyć $\ln 2$ z dokładnością do $0,01$?

27. Jakie własności posiada funkcja $y = f(x)$ mająca ciągłą pochodną $f^{(2n)}(x)$ w punkcie x_0, jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(2n)}(x_0) \neq 0?$$

28. Poprzestając na pierwszych dwóch wyrazach wzoru Maclaurina obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{1,005} = \sqrt{1+0,005}$ oraz ocenić błąd.

29. Znaleźć ekstrema funkcji korzystając z *drugiego warunku dostatecznego dla ekstremum*.

(a) $y = \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)^2$, (b) $y = \frac{2^x}{x}$, (c) $y = x^x$, (d) $y = \sqrt{2 - x - x^2}$.

30. Zbadać kierunek wypukłości krzywej

(a) $y = -2x^2$, (b) $y = x^2 - x + 6$, (c) $y = e^x$, (d) $y = \ln x$.

31. Znaleźć punkty przegięcia krzywej

(a) $y = x^3 - 6x^2 - 5x + 4$, (b) $y = x^5 + 5x$.

32. Zbadać wypukłość i punkty przegięcia krzywej

(a) $y = \sin x$,
(b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$,
(c) $y = e^{-x^2}$,
(d) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$,
(e) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$,
(f) $y = xe^x$.

33. Znaleźć asymptoty krzywej:

(a) $y = \frac{3x^3-5x^2+1}{x^2}$,
(b) $y = \frac{x^2+1}{x}$,
(c) $y = x \cdot e^{-1/x}$,
(d) $x^2(y-1) = x - 2$.

34. Zbadać i wykreślić krzywą:

(a) $y = 2x^2 - 5x + 3$,
(b) $y = 6 - x - x^2$,
(c) $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 4$,
(d) $y = x^3 - 2x$,
(e) $y = (x-1)^2(x+2)^3$,
(f) $y = e^{-x^2}$,
(g) $y = e^{-x} \sin x$,
(h) $y = \frac{4x+4}{x^2}$,
(i) $y = \frac{x}{1+x^2}$,
(j) $y = \frac{2x}{1-x^2}$,
(k) $y = \frac{1}{1-x^2}$,
(l) $y = \frac{x^2}{1+x}$,
(m) $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$,
(n) $y = x + \sqrt{1-x}$,
(o) $y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,
(p) $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$,
(q) $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x^2-a^2)}{a}}, a > 0$,
(r) $y = x - \frac{a^2}{x^2}$,
(s) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$,
(t) $y = \ln \cos x$.

Bibliografia

1. *Matematyka część I* W. Wrona
2. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski