Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

obliczanie pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych

(wersja: 20 lutego 2021)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie pochodnej cząstkowej z definicji;
2. Obliczanie pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu;

Zadania

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne $\frac{\partial}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}$ funkcji $f(x,y) = xy + x^2 + y - 2x$ w punkcie $(1,0)$.

2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

   (a) $f(x,y) = xy + x^2 + y - 2x$, (b) $f(x,y) = \frac{e^x}{\ln(x+y)}$, (c) $f(x,y) = \sin^2(x - y^2)$.

3. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $f(x,y) = \ln(x-y)$ i sprawdzić, czy pochodne mieszane są funkcjami ciągłymi.

   Twierdzenie Schwarza *Jeżeli pochodne mieszane funkcji $f(x,y)$ są ciągłe w punkcie (x_0,y_0), to są sobie równe w tym punkcie, czyli $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.*

4. Obliczyć pochodną $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y)$ dla $f(x,y) = \cos(\frac{y}{x})$.

5. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

   (a) $f(x,y) = x^2y^3 - x\sin y$,
   (b) $f(x,y,z) = x^5y^{10} - x^3\sin z + y^2e^z$,
   (c) $f(x,y) = x^y$ dla $x > 0$,
   (d) $f(x,y,z) = (3x^2y + z^4)^{10}$,
   (e) $f(x,y) = (\ln x)^{\sin y}$,
   (f) $f(x,y,z) = (x\,\mathrm{tg}\,z)^{\ln y}$ dla $x > 0, y > 0$,
   (g) $f(x,y,z) = (2x + 3z)^{yz}$,
   (h) $f(x,y,z) = y^2(5y - 2z)^{xz}$ dla $5y - 2z > 0$,
   (i) $f(x,y,z) = (\sin x)^{\mathrm{tg}\,z}(\mathrm{ctg}\,z)^{\cos y}$ dla $\sin x > 0, \mathrm{ctg}\,z > 0$,
   (j) $f(x,y,z) = x^{y^z}$ dla $x > 0, y > 0$.

6. Wykazać, że funkcja $u = \ln(e^x + e^y)$ spełnia równanie $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

7. Wykazać, że funkcja $u = x^y y^x$ spełnia równanie $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u)u$.

8. Sprawdzić, czy funkcja $u = e^{\frac{x}{y^2}}$ spełnia równanie $2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

9. Sprawdzić, czy funkcja $u = x + \frac{x-y}{y-z}$ spełnia równanie $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

10. Sprawdzić, czy funkcja $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ spełnia równanie $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

11. Zbadać, z jaką prędkością zmienia się objętość $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ stożka
    (a) przy zmianie wysokości h,
    (b) przy zmianie promienia podstawy R.

12. Obliczyć, pod jakim kątem przecinają się krzywe otrzymane przez przecięcie powierzchni

$$z_1 = x^2 + \frac{y^2}{6} \quad \text{oraz} \quad z_2 = \frac{x^2 + y^3}{3}$$

płaszczyzną $y = 2$.

Bibliografia

1. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I/II* K. Krysicki, W. Włodarski