

ĆWICZENIA

obliczanie całek podwójnych, zastosowanie całek podwójnych

(wersja: 23 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie całek podwójnych;
2. Zastosowanie całek podwójnych do obliczania objętości brył;

Zadania

1. Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie Oxy i ograniczony prostymi $x = 1$, $y = 2$, $x = -1$, $y = -2$, został ścięty od góry powierzchnią $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$. Obliczyć objętość powstałej bryły.
2. *Zadanie jak zadanie 1, ale należy zmienić kolejność całkowania.*
Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie Oxy i ograniczony prostymi $x = 1$, $y = 2$, $x = -1$, $y = -2$, został ścięty od góry powierzchnią $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$. Obliczyć objętość powstałej bryły.
Uwaga: zachować wskazaną kolejność całkowania:
$$V = \iint_D (6 - x^2 - y^2) dy dx.$$
3. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D (2x + y - 1) d\sigma$, gdzie obszarem całkowania D jest obszar trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(5, 5)$.
4. *Zadanie jak zadanie 3, ale należy wykorzystać nowe granice całkowania.*
Obliczyć całkę podwójną $\iint_D (2x + y - 1) d\sigma$, gdzie obszarem całkowania D jest obszar trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(5, 5)$.
Uwaga: obszar D trzeba podzielić na dwa obszary i całkować:
$$\int_{y=1}^{y=3} \left(\int_{x=2y-1}^{x=y} (2x + y + 1) dx \right) dy + \int_{y=3}^{y=5} \left(\int_{x=y}^{x=5} (2x + y + 1) dx \right) dy.$$
5. Dany jest walec obrotowy o promieniu r i osi obrotu Oy . Obliczyć objętość części walca wznoszącej się nad trójkątem OAB , który jest połową kwadratu $OBAC$ o boku r , leżącego w płaszczyźnie Oxy

6. Obliczyć całkę podwójną:

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{10+2x+y}}$$

rociągniętą na obszar D ograniczony łukiem paraboli $y = x^2$, odcinkiem osi Ox , odcinkiem $x = -1$ i odcinkiem prostej $x = 3$.

7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $z = 0$, $x = a$, $y = a$, $x = -a$, $y = -a$ oraz powierzchnią kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, gdzie $a > 0$, $z \geq 0$.

8. Obliczyć całki podwójne:

$$\bullet \int_0^4 dx \int_4^{12} xy dy,$$

$$\bullet \int_0^a dx \int_0^b xy(x-y) dy,$$

$$\bullet \int_0^b \left(\int_t^{10t} \sqrt{st-t^2} ds \right) dt,$$

$$\bullet \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^a r^4 dr, \text{ gdzie } a > 0.$$

9. Obliczyć całkę $\iint_D \sin x \cos y dx dy$, gdzie obszarem całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(0, 0)$, gdzie $a > 0$.

Uwaga: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$.

Bibliografia

1. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I/II* K. Krysicki, W. Włodarski