Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

szeregi, definicja, własności, szereg geometryczny, arytmetyczny, kryteria zbieżności szeregów, szeregi bezwzględnie zbieżne, szeregi naprzemienne

(wersja: 17 listopada 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia:
   (a) szereg liczbowy nieskończony,
   (b) wyraz szeregu,
   (c) wyraz ogólny szeregu,
   (d) suma cząstkowa,
   (e) szereg zbieżny,
   (f) szereg rozbieżny,
   (g) suma szeregu nieskończonego,
   (h) szereg o wyrazach nieujemnych,
   (i) szereg przeminny,
   (j) szereg bezwzględnie zbieżny,
   (k) szereg warunkowo zbieżny.
2. Często spotykane typy szeregów:
   (a) szereg geometryczny,
   (b) szereg arytmetyczny,
   (c) szereg harmoniczny,
   (d) szereg harmoniczny rzędu α,
   (e) szereg anharmoniczny.
3. Twierdzenia:
   (a) twierdzenie o mnożeniu szeregu przez liczbę,
   (b) warunek konieczny zbieżności szeregu.
4. Kryteria (roz)zbieżności szeregów
   (a) dla szeregów o wyrazach nieujemnych
      i. kryterium porównawcze (ro)zbieżności szeregów,
      ii. kryterium d'Alemberta (ro)zbieżności szeregów,
      iii. wnioski wynikające z kryteriów d'Alemberta,
      iv. kryterium Cauchy'ego (ro)zbieżności szeregów,

v. wnioski wynikające z kryteriów Cauchy'ego.

(b) dla szeregów naprzemiennych

i. kryterium Leibniza zbieżności szeregu,

ii. kryterium bezwzględnej zbieżności szeregów.

Oznaczenia i terminologia

1. **Szereg liczbowy nieskończony** Przez *szereg liczbowy nieskończony* oznaczony symbolem

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

rozumiemy ciąg sum:

$$s_1 = u_1,$$
$$s_2 = u_1 + u_2,$$
$$\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$
$$\ldots$$

2. **Wyrazy szeregu** Liczby $u_1, u_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami szeregu*.

3. **Wyraz ogólny szeregu** Symbol $\{u_n\}$ nazywamy *wyrazem ogólnym szeregu*.

4. **Suma cząstkowa** Wyraz ciągu $\{s_n\}$ nazywamy *sumami cząstkowymi* szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

5. **Szereg zbieżny** Jeżeli ciąg sum cząstkowych $\{s_n\}$ jest zbieżny, czyli ma skończoną granicę s, to mówimy, że szereg jest zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$.

6. **Suma szeregu nieskończonego** Liczbę s nazywamy *sumą szeregu nieskończonego*. Na oznaczenie sumy s szeregu używa się tych samych symboli, co na oznaczenie samego szeregu, mianowicie:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

7. **Szereg rozbieżny** Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy *szeregiem rozbieżnym*.

8. **Szereg geometryczny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad \text{czyli} \qquad a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $|q| < 1$, tzn. gdy $-1 < q < 1$, i wówczas suma jego wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

9. **Szereg arytmetyczny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(1 + (n-1)r), \qquad \text{czyli} \qquad a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + (a + (n-1)r) + \ldots$$

jest rozbieżny, gdy jednocześnie $a \neq 0$ i $r \neq 0$. Dla $a = 0$ i $r = 0$, to jest to szereg stale równy 0.

10. **Szereg harmoniczny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \text{czyli} \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

jest rozbieżny do ∞.

11. **Szereg harmoniczny rzędu α**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{czyli} \qquad 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots,$$

gdzie $\alpha > 0$, jest dla $\alpha > 1$ zbieżny, a dla $\alpha \leq 1$ jest rozbieżny.

12. **Szereg anharmoniczny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \qquad \text{czyli} \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots,$$

jest zbieżny.

13. **Szereg o wyrazach nieujemnych** Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu są nieujemne, to taki szereg nazywamy *szeregiem o wyrazach nieujemnych*.

14. **Szereg przemienny** *Szereg przemienny* to szereg, w którym wyrazy dodatnie i ujemne występują regularnie na przemian.

15. **Szereg bezwzględnie zbieżny** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nazywamy *szeregiem bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny.

16. **Szereg warunkowo zbieżny** Szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywamy *szeregiem warunkowo zbieżnym*.

Twierdzenia

1. **Mnożenie szeregu przez liczbę** Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny i jego suma równa się s, a c jest liczbą stałą, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ jest zbieżny i jego suma jest równa cs. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny, to przy $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ jest też rozbieżny.

2. **Warunek konieczny zbieżności szeregu** Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest to, żeby jego wyraz ogólny dążył do zera:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

3. **Szeregi o wyrazach nieujemnych**

   (a) **Kryterium porównawcze zbieżności szeregów** Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, gdzie $u_n \geq 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, że począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $u_n \leq v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również zbieżny.

   (b) **Kryterium porównwawcze rozbieżności szeregów** Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ można wskazać taki szereg rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, gdzie $v_n \geq 0$, że począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $u_n \geq v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również rozbieżny.

(c) **Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów** Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach dodatnich począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \geq N$) stosunek dowolnego wyrazu u_{n+1} do poprzedzającego wyrazu u_n jest stale mniejszy od pewnej liczby p mniejszej od 1, tzn. jeżeli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq p < 1 \qquad \text{dla wszystkich} \qquad n \geq N,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

(d) **Kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregów** Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach dodatnich począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \geq N$) stosunek dowolnego wyrazu u_{n+1} do poprzedzającego wyrazu u_n jest nie mniejszy od jedności, tzn. jeżeli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \qquad \text{dla wszystkich} \qquad n \geq N,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

(e) **Wnioski wynikające z kryteriów d'Alemberta**

i. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

ii. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = s > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

iii. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, to przypadek jest wątpliwy; należy wtedy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.

(f) **Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów** Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach nieujemnych istnieje taka liczba $p < 1$, że począwszy od pewnego miejsca N (tzn. dla każdego $n \geq N$) zachodzi równość

$$\sqrt[n]{u_n} \leq p < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

(g) **Kryterium Cauchy'ego rozbieżności szeregów** Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dla nieskończenie wielu wartości n (niekoniecznie dla wszystkich) zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

(h) **Wnioski wynikające z kryteriów Cauchy'ego**

i. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = r < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

ii. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = s > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

iii. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, to przypadek jest wątpliwy; należy wtedy stosować inne metody badania zbieżności szeregów.

(i) Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta.

4. Szeregi przemienne

(a) **Kryterium Leibniza zbieżności szeregów** Jeżeli w szeregu przemiennym $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ począwszy od pewnego miejsca N bezwzględne wartości wyrazów szeregu dążą monotonicznie do zera, to znaczy, dla każdego $n > N$ spełnione są jednocześnie warunki:

$$|u_{n+1}| \leq |u_n|,$$

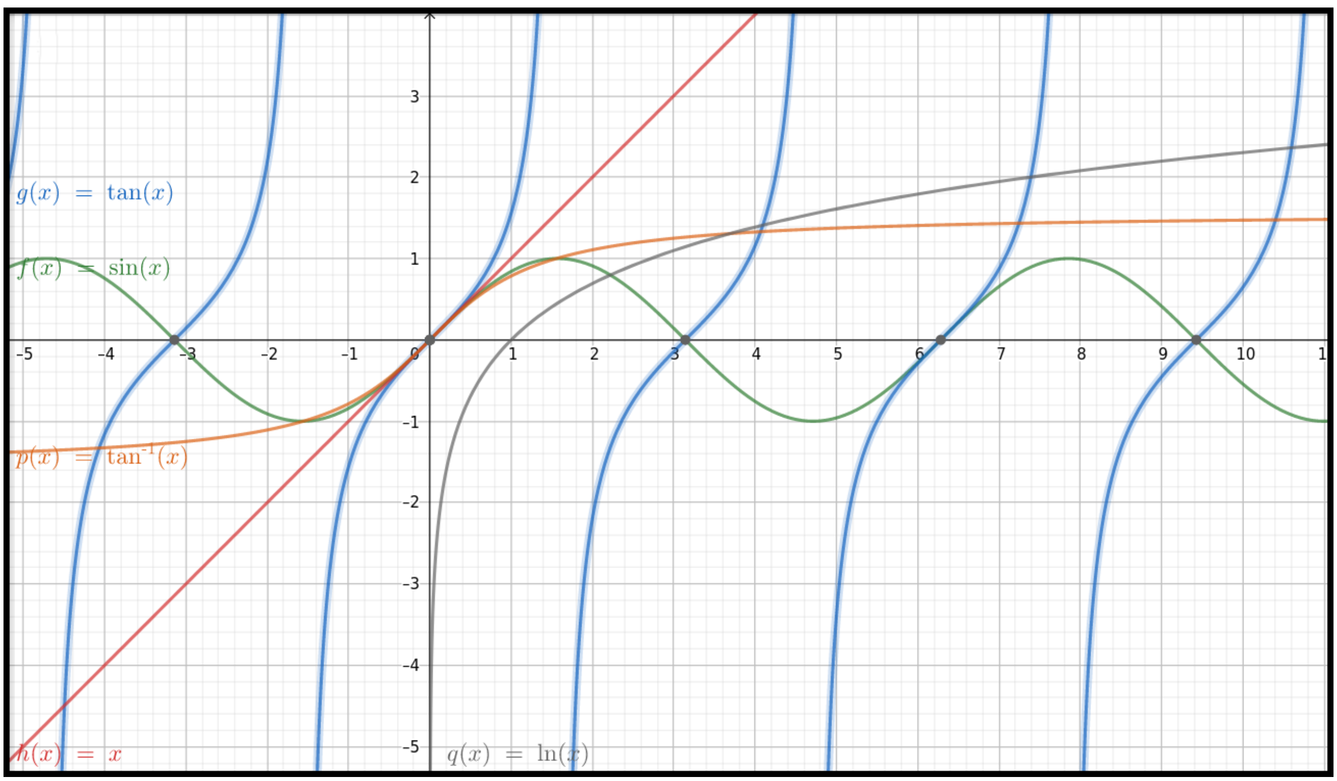
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny. Drugi z warunków jest koniecznym warunkiem zbieżności każdego szeregu.

(b) **Kryterium bezwzględnej zbieżności szeregów** Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, którego wyrazy są równe wartościom bezwzględnym wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, jest zbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Przydatne wzory

1. Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$,
4. $|\sin n| \leq 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
5. $\log n < n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
6. wzór Stirlinga: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
7. wniosek ze wzoru Stirlinga: $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$,
8. $a \log_c b = \log_c b^a$.



Rysunek 1: Zależności między wartościami funkcji trygonometrycznymi zobrazowane na wykresie.

Zadania

1. Zbadać zbieżność szeregu korzystając z kryterium porównawczego

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$,
(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$,
(h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$,
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$,
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$,
(m) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$,
(n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$,
(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu korzystając z kryterium d'Alemberta

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 5^n}{(2n)!}$,
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n$,
(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n \cdot 3^{n+1}}$.

3. Zbadać zbieżność szeregu korzystając z kryterium Cauchy'ego

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$,
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ oraz $a \neq b$ i $a_n > 0$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} n)^n}{2^n}$.

4. Zbadać zbieżność szeregu korzystając z kryterium Leibniza

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1)$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$,
(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$.

5. Zbadać zbieżność szeregu korzystając z kryterium bezwzględnej zbieżności.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \frac{1}{3^n}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$.

6. Wykazać, że dla poniższych szeregów nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

7. Obliczyć, jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy

(a) $0,(45)$,
(b) $0,4(90)$.

Bibliografia

1. *Analiza matematyczna w zadaniach cz. I* W. Krysicki, L. Włodarski