Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

obliczanie iloczynu wektorowego i mieszanego wektorów, zastosowanie iloczynów wektorów do obliczania pola powierzchni równoległoboku i objętości równoległościanu

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie iloczynu wektorowego par wektorów;
2. Wykorzystanie iloczynu wektorowego do obliczenia pól powierzchni trójkąta, równoległoboku i równoległościanu;
3. Wykorzystanie iloczynu wektorowego do obliczenia odległości punktu od prostej;
4. Obliczanie iloczynów mieszanych uporządkowanych trójek wektorów;
5. Wykorzystanie iloczynu mieszanego wektorów do obliczenia objętości równoległościanu i czworościanu;
6. Wykorzystanie iloczynu mieszanego wektorów do obliczenia wysokości czworościanu o danych wierzchołkach;
7. Wykorzystanie iloczynu mieszanego do sprawdzenia, czy wektory lub punkty są współpłaszczyznowe;

Zadania

1. Obliczyć iloczyny wektorowe par wektorów:
   (a) $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, -5)$,
   (b) $\vec{p} = 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$.
2. Obliczyć pole powierzchni:
   (a) trójkąta rozpiętego na wektorach $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$,
   (b) równoległoboku o trzech kolejnych wierzchołkach $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, -1, 5)$, $C = (-1, 5, 0)$,
   (c) równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

3. Obliczyć odległość punktu $P = (3, 2, 5)$ od prostej l wyznaczonej przez wektor $\vec{a} = (1, 1, 1)$ zaczepiony w początku układu współrzędnych.

4. Znaleźć wszystkie wektory o długości $10\sqrt{3}$ prostopadłe do płaszczyzny wyznaczonej przez $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ i $-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

5. Obliczyć iloczyny mieszane uporządkowanych trójek wektorów:
   (a) $\vec{a} = (3, -2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$,
   (b) $\vec{p} + \vec{q}$, $2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{r}$, jeżeli iloczyn mieszany $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 3$.

6. Obliczyć objętości wielościanów:
   (a) równoległościan $ABCDA'B'C'D'$, gdzie $A = (1, 0, 3)$, $B = (1, 2, 0)$, $D = (3, 0, 4)$, $A' = (0, -1, 3)$,
   (b) czworościan rozpięty na wektorach $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 3, -2)$.

7. Obliczyć długość h wysokości czworościanu o wierzchołkach $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (3, 4, 5)$ opuszczonej z wierzchołka D.

8. Sprawdzić, czy wektory $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, 3)$ są współpłaszczyznowe.

9. Sprawdzić, czy punkty $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $R = (-1, 3, 0)$, $S = (5, 0, -4)$ należą do jednej płaszczyzny.

10. Obliczyć iloczyny wektorowe par wektorów:
    (a) $\vec{a} = (-3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 5, -2)$,
    (b) $\vec{u} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$.

11. Obliczyć pole powierzchni:
    (a) równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -2, 5)$,
    (b) trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$,
    (c) czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

12. Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4)$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

13. Obliczyć iloczyny mieszane uporządkowanych trójek wektorów:
    (a) $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -5)$, $\vec{c} = (2, 3, -4)$,
    (b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

14. Obliczyć objętości wielościanów:
    (a) równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$, $\vec{w} = (2, 5, -1)$.
    (b) czworościan o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$,

15. Sprawdzić, czy wektory $\vec{a} = (-1, 3, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (4, -2, 0)$ są współpłaszczyznowe.

16. Sprawdzić, czy punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ należą do jednej płaszczyzny.

Bibliografia

1. *Geometria analityczna* F. Leja

2. *Algebra i geometria analityczna* T. Jurlewicz, Z. Skoczylas