

ĆWICZENIA

krzywe stożkowe: elipsa

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Znajdowanie równania elipsy o podanych wierzchołkach;
2. Znajdowanie długości osi elipsy, kiedy dane są dwa punkty do niej należące;
3. Znajdowanie osi, ogniskowej, mimośrodu elipsy, współrzędnych środka elipsy o danym równaniu;
4. Wyznaczanie stycznej do elipsy w zadanym punkcie;
5. Wyznaczanie stycznej do elipsy wychodzącej z zadanego punktu;
6. Wyznaczanie stycznych do elipsy równoległych do danej prostej;

Zadania

1. Znaleźć równanie elipsy o wierzchołkach $K = (-1, 3)$, $L = (5, 3)$, $U = (2, 1)$, $V = (2, 5)$.
2. Początek układu współrzędnych jest środkiem elipsy o osiach symetrii Ox i Oy . Znaleźć długości osi tej elipsy, jeżeli wiadomo, że przechodzi ona przez punkty $A = (1, 2)$, $B = (-3, 1)$.
3. Znaleźć osie, ogniskową i mimośród oraz wyznaczyć współrzędne środka i ognisk elipsy $9x^2 + 36x + 25y^2 - 50y - 164 = 0$.
4. W elipsę $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ wpisano kwadrat o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Obliczyć współrzędne wierzchołków tego kwadratu.
5. Koło K_1 jest zawarte w kole K_2 . Pokazać, że miejscem geometrycznym środków kół stycznych zewnętrznie do koła K_1 oraz wewnętrznie do koła K_2 jest elipsa.
6. Napisać równanie stycznej elipsy $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ w punkcie elipsy o jednakowych dodatnich współrzędnych.
7. Znaleźć równania stycznych elipsy $x^2 - 6x + 4y^2 + 5 = 0$ wychodzących z początku układu współrzędnych.

8. Znaleźć równania stycznych elipsy $4x^2 + 5y^2 = 120$, które są równoległe do prostej $y = 2x$.
9. Wyznaczyć równania wspólnych stycznych elips
- $$x^2 + 6y^2 = 6, \quad 9x^2 + 4y^2 = 36.$$
10. Znaleźć równanie elipsy o ogniskach $F_1 = (1, 1)$, $F_2 = (9, 1)$, która przechodzi przez punkt $P = (5, -2)$.
11. Punkty $A = (6, 4)$, $B = (-8, 3)$ należą do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz mimośród tej elipsy.
12. Znaleźć osie, ogniskową i mimośród oraz wyznaczyć współrzędne środka i ognisk elipsy $3x^2 + 12x + 5y^2 - 10y + 2 = 0$.
13. Jeden z boków trójkąta równobocznego wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jest równoległy do osi Oy . Wyznaczyć współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
14. Punkt $S = (-1, 1)$ jest środkiem cięciwy elipsy $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. Znaleźć równanie prostej zawierającej tę cięciwę.
15. Napisać równanie stycznej elipsy $3x^2 + 4y^2 = 12$ w punkcie $P = (-1, \frac{3}{2})$.
16. Znaleźć równania stycznych elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ poprowadzonych z punktu $P = (-3, 0)$
17. Znaleźć równania stycznych elipsy $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$, które są prostopadłe do prostej $x + y - 10 = 0$.
18. Osie elipsy pokrywają się z osiami układu współrzędnych, a proste $x + y = 5$, $x - 4y = 10$ są styczne do niej. Podać równanie elipsy.

Bibliografia

1. *Geometria analityczna* F. Leja
2. *Algebra i geometria analityczna* T. Jurlewicz, Z. Skoczylas