

ĆWICZENIA

krzywe stożkowe: hiperbola

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Znajdowanie równania hiperboli o danych ogniskach i przechodzącej przez zadany punkt;
2. Wyznaczanie współrzędnych ognisk i równania asymptot hiperboli, przechodzącej przez dwa zadane punkty;
3. Wyznaczanie współrzędnych wierzchołków i mimośrodków hiperboli o danym równaniu;
4. Wyznaczanie równania stycznej hiperboli w zadanym punkcie;
5. Wyznaczanie równań stycznych do hiperboli, wychodzących z zadanego punktu;

Zadania

1. Znaleźć równanie hiperboli o ogniskach $F_1 = (-3, 1)$, $F_2 = (7, 1)$, której jedno z ramion przechodzi przez punkt $P = (8, 1 + \frac{3\sqrt{5}}{2})$.
2. Punkty $A = (24, 5\sqrt{3})$, $B = (12\sqrt{5}, 10)$ należą do hiperboli, której osiami symetrii są osie układu współrzędnych. Wyznaczyć współrzędne ognisk oraz równania asymptot tej hiperboli.
3. Obliczyć współrzędne wierzchołków oraz mimośrodek hiperboli

$$9x^2 + 36x - 16y^2 + 96y - 252 = 0.$$

4. Wierzchołki trójkąta równobocznego należą do hiperboli $x^2 - y^2 = 4$, przez czym jednym z nich jest wierzchołek prawej gałęzi hiperboli. Znaleźć współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.
5. Pokazać, że miejscem geometrycznym środków kół stycznych zewnętrznie do dwóch ustalonych rozłącznych kół o różnych promieniach jest hiperbola.
6. Napisać równanie stycznej hiperboli $xy = 12$ w należącym do niej punkcie $A = (2, 6)$.
7. Znaleźć równania wszystkich stycznych do hiperboli $4x^2 - y^2 = 4$ poprowadzonych z punktu $P = (1, 4)$.

8. Na prawej gałęzi hiperboli o równaniu $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ znaleźć punkt położony najbliżej prostej $y = x$.
9. Pokazać, że punkt styczności prostej i hiperboli jest środkiem odcinka stycznej zawartego między asymptotami hiperboli.
10. Hiperbola ma ogniska $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$ oraz przechodzi przez punkt $P = (3\sqrt{5}, 4)$. Podać równanie hiperboli.
11. Proste $y = -\sqrt{3}x$, $y = \sqrt{3}x$ są asymptotami hiperboli. Znaleźć współrzędne ognisk oraz mimośród hiperboli, jeżeli wiadomo, że punkt $W = (1, 0)$ jest jednym z jej wierzchołków.
12. Wyznaczyć osie oraz współrzędne środka hiperboli $2x^2 + 4x - 5y^2 + 10y - 13 = 0$.
13. Dwa wierzchołki kwadratu należą do jednej, a pozostałe dwa do drugiej gałęzi hiperboli $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$. Znaleźć bok kwadratu.
14. Napisać równanie stycznej hiperboli $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ w punkcie $P = (\sqrt{6}, \sqrt{6})$.
15. Z punktu $P = (1, 0)$ poprowadzono styczne hiperboli $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. Znaleźć ich równania.
16. Wyznaczyć równania stycznych hiperboli $2x^2 - 5y^2 = 30$ równoległych do prostej $y = x - 2$.
17. Znaleźć pólisie hiperboli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, która w punkcie $P = (4, 2)$ jest styczna do prostej $y = x - 2$.

Bibliografia

1. *Geometria analityczna* F. Leja
2. *Algebra i geometria analityczna* T. Jurlewicz, Z. Skoczylas