

ĆWICZENIA

przekształcenia układu współrzędnych, ukośnokątny układ współrzędnych, inne układy współrzędnych

(wersja: 19 lutego 2021)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Wyprowadzenie wzoru na odległość punktu od początku układu współrzędnych w ukośnokątnym układzie współrzędnych;
2. Obliczanie odległości między punktami w ukośnokątnym układzie współrzędnych;
3. Wyprowadzenie związków między współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi biegunowymi, sferycznymi i walcowymi;
4. Zamiana współrzędnych między powyższymi typami układów współrzędnych.
5. Obliczanie odległości między punktami w biegunowym układzie współrzędnych;
6. Obliczanie współrzędnych punktu po przesunięciu równoległym układu współrzędnych;
7. Obliczanie współrzędnych punktu po obrocie punktu lub układu współrzędnych dokoła początku układu współrzędnych;

Zadania

1. W prostokątnym układzie współrzędnych xOy dany jest punkt $P = (x, y)$. Znaleźć współrzędne tego punktu w układzie współrzędnych powstałym z układu xOy przez przesunięcie jego początku do punktu o współrzędnych (h, k) .
2. Dany jest punkt $P = (0, 3)$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Znaleźć współrzędne punktu P w układzie współrzędnych powstałym przez przesunięcie początku układu współrzędnych do punktu $(4, -5)$.
3. Punkt P ma współrzędne $(-4, 3)$ w prostokątnym układzie współrzędnych $x'O'y'$, powstałym z układu xOy poprzez przesunięcie początku układu współrzędnych do punktu $(2, 3)$. Znaleźć współrzędne punktu P w nieprzesuniętym układzie.

4. Pewien punkt ma w układzie współrzędnych Oxy współrzędne $A(2, -3)$, a w układzie $O'x'y'$, który powstał z układu Oxy przez przesunięcie równoległe, ma współrzędne $A'(-3, -4)$. Znaleźć współrzędne (a, b) punktu O' w układzie Oxy .
5. Punkt $P(x_0, y_0)$ obrócono dokoła początku układu współrzędnych o kąt α . Znaleźć jego współrzędne po obrocie.
6. Między współrzędnymi x, y pewnego punktu zachodzi związek $x^2 - y^2 = 2$. Jaki związek zachodzi między współrzędnymi tego samego punktu względem układu powstałego z danego przez obrót o kąt -45° ?
7. Między współrzędnymi x, y pewnego punktu w układzie Oxy zachodzi związek $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 12 = 0$. Jaki związek zachodzi między współrzędnymi tego punktu, gdy układ przesuniemy równoległe do punktu $(-1, 2)$?
8. Układ współrzędnych Oxy przesunięto do punktu (a, b) i następnie obrócono o kąt φ . Znaleźć punkt mający względem układów początkowego i końcowego te same współrzędne.
9. Obliczyć odległość punktu P od początku układu współrzędnych w ukośnokątnym układzie współrzędnych o kącie θ .
10. Obliczyć odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w układzie ukośnokątnym o kącie θ .
11. Wyprowadzić związki między współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi biegunowymi.
12. Znaleźć na płaszczyźnie układu Oxy :
 - współrzędne prostokątne x, y punktu o współrzędnych biegunowych $r = 4, \varphi = 30^\circ$,
 - współrzędne biegunowe r, φ punktu o współrzędnych prostokątnych $(-3, 4)$ (amplitudę wyrazić jako funkcję trygonometryczną kąta).
13. Obliczyć odległość punktów A, B mających współrzędne biegunowe r, φ i r', φ' .
14. Wyprowadzić związki między współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi sferycznymi.
15. Wyprowadzić związki między współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi walcowymi.
16. Znaleźć w układzie przestrzennym $Oxyz$ współrzędne prostokątne x, y, z punktu mającego współrzędne:
 - (a) sferyczne $r = 2$ (promień wodzący), $\varphi = 60^\circ$ (długość geograficzna), $\theta = 45^\circ$ (szerokość geograficzna),
 - (b) walcowe $\rho = 4$ (promień wodzący), $\varphi = 30^\circ$ (długość geograficzna), $z = 3$ (wysokość).
17. Znając współrzędne prostokątne punktu x, y, z znaleźć jego współrzędne sferyczne i walcowe.
18. Gdzie leżą w układzie $Oxyz$ punkty o współrzędnych sferycznych r, φ, θ , w których stałe są:
 - (a) r i θ ,
 - (b) r i φ ,
 - (c) θ .
19. Biorąc do pomocy współrzędne biegunowe r, φ punktu $P = (x_0, y_0)$ przed obrotem, znaleźć współrzędne punktu P po obrocie dokoła początku układu współrzędnych o kąt α .

Bibliografia

1. *Geometria analityczna* F. Leja
2. *Algebra i geometria analityczna* T. Jurlewicz, Z. Skoczylas