Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

sprawdzanie punktów wspólnych, znajdowanie punktów przecięcia, obliczanie odległości, obliczanie miary kąta, znajdowanie rzutów prostokątnych i symetrii, znajdowanie rzutów ukośnych w kierunku danego wektora

(wersja: 22 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Sprawdzanie, czy:
   (a) punkty należą do prostej;
   (b) prosta należy do płaszczyzny;
   (c) proste l_1 i l_2 mają punkt wspólny;
   (d) płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe;
2. Znajdowanie punktów przecięcia:
   (a) dwóch prostych;
   (b) prostej i płaszczyzny;
   (c) trzech płaszczyzn;
3. Obliczanie odległości:
   (a) punktu od płaszczyzny;
   (b) płaszczyzn równoległych;
   (c) punktu od prostej;
   (d) prostych równoległych;
   (e) prostych skośnyh;
   (f) prostej od płaszczyzny;
4. Obliczanie miary kąta między:
   (a) prostą a płaszczyzną;
   (b) dwiema płaszczyznami;
   (c) dwiema prostymi;

5. Znajdowanie rzutów prostokątnych:
   (a) punktu na prostą;
   (b) punktu na płaszczyznę;
   (c) prostej na płaszczyznę;
6. Znajdowanie punktu symetrycznego do danego względem:
   (a) punktu;
   (b) prostej;
   (c) płaszczyzny;
7. Znajdowanie rzutu ukośnego w kierunku wektora $\vec{w}$:
   (a) punktu na płaszczyznę;
   (b) prostej na płaszczyznę;

Zadania

1. Zbadać, czy
   (a) punkty $A = (1, -2, 5)$, $B = (3, -2, 11)$ należą do prostej
   $$l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{-3},$$
   (b) prosta
   $$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = \quad - 2t, \\ z = 3 + 3t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \mathbb{R}$$
   jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$,
   (c) punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, -1, 3)$ należą do płaszczyzny
   $$l : \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 \quad - 2t, \end{cases} \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}$$
   (d) proste l_1 oraz l_2 mają punkt wspólny, jeżeli:
   $$l_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 3t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \mathbb{R}$$
   $$l_2 : \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 2 - s, \\ z = -3 + 4s, \end{cases} \text{gdzie } s \in \mathbb{R}$$
   (e) prosta
   $$l : \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$
   jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 15 = 0$,

(f) płaszczyzny $\pi_1 : 2x + 3y - 5y + 30 = 0$,

$$\pi_2 = \begin{cases} x &= -5 &+ & &+ & t, \\ y &= 2 &+ & 5s &+ & t, \\ z &= 1 &+ & 3s &+ & t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R}$$

są równoległe.

2. Znaleźć punkty przecięcia:

(a) prostych

$$l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3},$$
$$l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4},$$

(b) prostej

$$l : \begin{cases} x &= 1 &+ & 1, \\ y &= &- & 3t, \\ z &= 4 &- & t \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbb{R},$$

i płaszczyzny $\pi : x + y + z - 7 = 0$,

(c) płaszczyzn

$$\pi_1 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + r(1, -2, 4) + s(0, -1, 3), \text{ gdzie } r, s \in \mathbb{R},$$

$$\pi_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(1, 1, 1) + u(-1, 0, 0) \text{ gdzie } t, u \in \mathbb{R},$$

$$\pi_3 : (x, y, z) = (2, 3, 3) + v(1, 0, 0) + w(0, -2, -1) \text{ gdzie } v, w \in \mathbb{R}.$$

3. Obliczyć odległość:

(a) punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny

$$\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0,$$

(b) płaszczyzn równoległych: $\pi_1 : 2x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -4x + 2y - 6z + 8 = 0$,

(c) punktu $P = (0, 0, 0)$ od prostej

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2},$$

(d) prostych równoległych

$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3},$$
$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6},$$

(e) prostych skośnych

$$l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 1, \end{cases}$$

$$l_2 : \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

(f) prostej

$$l : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$$

od płaszczyzny $\pi : x + y - z + 7 = 0$.

4. Obliczyć miarę kąta między:

   (a) prostą

   $$l : \frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

   i płaszczyzną

   $$\pi : 2x - 3y - 5 = 0$$

   ,

   (b) płaszczyznami

   $$\pi_1 : (x, y, z) = (1, 6, 7) + s(-1, 2, 0) + t(1, 1, 1),$$

   gdzie $s, t \in \mathbb{R}$,

   $$\pi_2 : (x, y, z) = (3, 4, 5) + s(0, 1, -3) + t(1, 0, -2),$$

   gdzie $s, t \in \mathbb{R}$,

   (c) prostymi

   $$l_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 3 = 0, \end{cases}$$

   $$l_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

5. Znaleźć rzut prostokątny:

   (a) punktu $P = (1, 0, -3)$ na prostą

   $$l : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2},$$

   (b) punktu $P = (0, 0, 1)$ na płaszczyznę

   $$\pi : x + y - 2z + 4 = 0,$$

   (c) prostej $l : x = y = z$ na płaszczyznę

   $$\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

6. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (0, 1, 3)$ względem:

   (a) punktu $S = (1, 0, -1)$,
   (b) prostej $l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}$,
   (c) płaszczyzny $\pi : x + y + z = 0$.

7. Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{w} = (1, -1, 1)$:

   (a) punktu $P = (0, 1, 0)$ na płaszczyznę

   $$\pi : x + 3y - 6 = 0,$$

(b) prostej $l : x = -2y = 3z$ na płaszczyznę

$$\pi : x + y + z - 5 = 0.$$

8. Zbadać, czy

(a) punkty $A = (1,2,3)$, $B = (-1,-2,0)$ należą do prostej

$$l : \begin{cases} x &= 1 + t, \\ y &= 2 + 2t, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}, \\ z &= 3 - t \end{cases},$$

(b) prosta

$$m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0, \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases},$$

jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 5y - 3z + 13 = 0$,

(c) punkty $A = (0,1,5)$, $B = (1,2,3)$ należą do płaszczyzny

$$l : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \text{ gdzie } s,t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - s + 2t, \end{cases}$$

(d) proste $l_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-8}$ oraz $l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny,

(e) prosta

$$l : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$$

jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi : x + y - z + 3 = 0.$$

9. Znaleźć punkty przecięcia:

(a) prostych

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0, \end{cases}$$

$$l_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + 2z - 5 = 0, \end{cases}$$

(b) prostej

$$l : \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

i płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = 1 + s + 2t, \text{ gdzie } s,t \in \mathbb{R}, \\ z = 3 + 2s + 4t, \end{cases}$$

(c) płaszczyzn

$$\begin{aligned} \pi_1 &: 3x + y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 &: x + 2z + 6 = 0 \\ \pi_3 &: 3y + 2z = 0. \end{aligned}$$

10. Obliczyć odległość:

(a) punktu $P = (1, -2, 3)$ od płaszczyzny
$$\pi : x + y - 3z + 5 = 0,$$

(b) płaszczyzn równoległych:
$$\pi_1 : 2x + y - 2z = 0, \pi_2 : 2x + y - 2z - 3 = 0,$$

(c) płaszczyzn:
$$\pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0, \pi_2 : 3x - 6y + 6z - 3 = 0,$$

(d) punktu $P = (0, 1, -1)$ od prostej
$$l : \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3},$$

(e) prostych równoległych
$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1},$$
$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{2},$$

(f) prostych skośnych
$$l_1 : \begin{cases} x &= 0, \\ y &= 0, \end{cases}$$
$$l_2 : \begin{cases} x &= 1, \\ z &= 1, \end{cases}$$

(g) prostych
$$l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1},$$
$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$$

(h) prostej
$$l : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbb{R},$$
od płaszczyzny $\pi : 2x + y + 4z = 0$.

11. Obliczyć miarę kąta między:

(a) prostą
$$l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$$
i płaszczyzną $\pi : x - z = 0$,

(b) płaszczyznami
$$\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0,$$
$$\pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0,$$

(c) prostymi

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbb{R},$$

$$l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2s, \\ y = 4 - s, \\ z = 1 + 3s \end{cases} \text{ gdzie } s \in \mathbb{R}.$$

12. Znaleźć rzut prostokątny:

(a) punktu $P = (-3, 2, 0)$ na płaszczyznę

$$\pi : x + y + z = 0,$$

(b) punktu $P = (-1, 2, 0)$ na prostą

$$l : x = y = z,$$

(c) prostej $l : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{0}$ na płaszczyznę

$$\pi : x + 3y - 2z - 6 = 0.$$

13. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:

(a) punktu $S = (1, -1, 2)$,

(b) prostej $l : \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$,

(c) płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$.

14. Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{w} = (2, 3, -1)$:

(a) punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę

$$\pi : x - 2z + 8 = 0,$$

(b) prostej $l : x - 1 = y + 1 = z - 2$ na płaszczyznę

$$\pi : x - y + z - 1 = 0.$$

Bibliografia

1. *Geometria analityczna* F. Leja
2. *Algebra i geometria analityczna* T. Jurlewicz, Z. Skoczylas