Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

ĆWICZENIA

model liniowy z jedną zmienną objaśniającą

(wersja: 23 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie parametrów linii regresji II rodzaju w modelach liniowych.

Oznaczenia i terminologia

1. **Parametry linii regresji** Znajomość funkcji regresji $y = a_1 x + b_1$ sprowadza się do znajomości jej parametrów a_1 i b_1 (dla zależności odwrotnej – a_2 i b_2):

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \qquad b_1 = \overline{y} - a_1\overline{x},$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}, \qquad b_2 = \overline{x} - a_2\overline{y}.$$

2. Metodę służącą do szacowania parametrów linii regresji, ze względu na jej ideę, nazywamy *metodą najmniejszych kwadratów*.

3. Ze wzorów na wyrazy wolne (b_1 i b_2) wynika, że obie proste regresji przechodzą przez środek ciężkości, tj. punkt o współrzędnych $(\overline{x}, \overline{y})$.

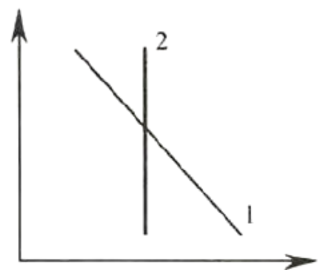
4. Z porównania wzorów na parametry kierunkowe (a_1, a_2) wynika, że mają one takie same znaki.

5. Parametry kierunkowe obu linii regresji spełniają warunek $a_1 a_2 \leq 1$.

6. Kąt przecięcia się obu prostych regresji zależy od rozrzutu punktów empirycznych na wykresie korelacyjnym. Im bardziej punkty "zbliżają się" do linii prostej, tym mniejszy jest kąt przecięcia się obu prostych regresji. Gdy wszystkie punkty układają się idealnie wzdłuż linii prostej, obie proste regresji pokrywają się, a zależność regresyjna przechodzi w liniową zależność funkcyjną.

Zadania

1. Czy przedstawione na wykresie linie proste mogą być liniami regresji?



Rysunek 1: Ilustracja do zadania 1.

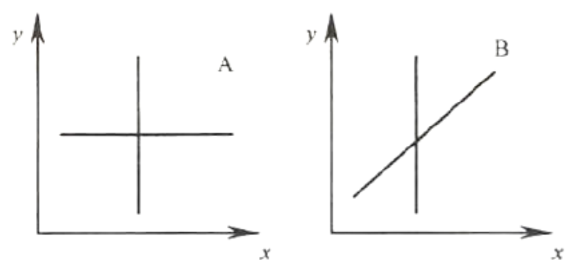
2. Oszacowano prostą regresji $\hat{y} = 0,5x + 2$. Wiadomo, że parametr kierunkowy prostej regresji x względem y jest większy od 1. Jaka jest możliwa wartość parametru kierunkowego?

3. W pewnym przedsiębiorstwie zużycie surowców A i B (w tonach) w ciągu 5 miesięcy przedstawiono w tabelce. Oszacować parametry linii regresji opisującej zależność zużycia surowca A od zużycia surowca B.

Miesiąc	A	B
1	21,1	6,0
2	22,9	4,8
3	25,0	4,0
4	26,4	3,1
5	29,6	2,1

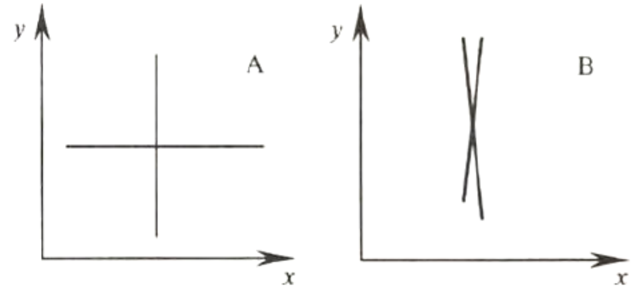
Rysunek 2: Tabela z danymi do zadania 3.

4. Na wykresach narysowano po dwie linie proste. Na którym na pewno nie są to linie regresji. Odpowiedź uzasadnić.



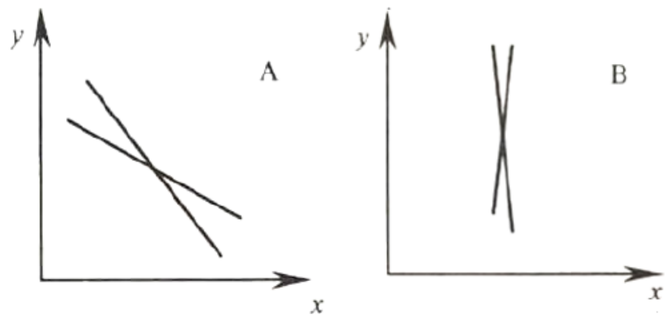
Rysunek 3: Ilustracja do zadania 4.

5. Na którym wykresie zamieszczonym poniżej na pewno nie są przedstawione linie regresji: A czy B? Odpowiedź uzasadnić.



Rysunek 4: Ilustracja do zadania 5.

6. Na którym wykresie zamieszczonym poniżej na pewno nie są przedstawione linie regresji: A czy B? Odpowiedź uzasadnić.



Rysunek 5: Ilustracja do zadania 6.

7. (a) Oszacować model $\hat{y} = az + b$, jeśli wiadomo, że parametr kierunkowy wynosi $-1,1$.
   (b) Oszacować model $\hat{z} = ax + b$, jeśli wiadomo, że parametr kierunkowy wynosi $0,909$.

x	y	z
1	2	0
0	0	1
2	–2	2
2	–1	3

Rysunek 6: Ilustracja do zadania 7.

8. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacowano parametr kierunkowy linii regresji $\hat{y} = a_1 x + b_1$: $a_1 = -0,6$. Dokończyć proces estymacji i zapisać oszacowane równanie.

x	y
2	3
3	4
5	2
4	0
6	1

Rysunek 7: Ilustracja do zadania 8.

9. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacowano parametr kierunkowy linii regresji $\hat{y} = a_1 x + b_1$: $a_1 = 0,8$. Dokończyć proces estymacji i zapisać oszacowane równanie.

x	y
6	4
4	5
5	3
3	3
2	0

Rysunek 8: Ilustracja do zadania 9.

10. Koszty całkowite – K (w mln zł) oraz produkcja – P (w tys. szt.) w ciągu 6 miesięcy w firmie MIKA przedstawione są w tabeli. Oszacować i zinterpretować parametry liniowego modelu kosztów całkowitych w zależności od produkcji.

Miesiąc t	1	2	3	4	5	6
Koszty	3	6	5	5	8	3
Produkcja	2	4	3	2	6	1

Rysunek 9: Ilustracja do zadania 10.

11. Oszacowano równanie linii regresji $\hat{y} = 2x - 3$ oraz obliczono wartość średnią zmiennej x: $\overline{x} = 4,5$. Jaka jest wartość średnia zmiennej y?

12. Oszacowano równanie linii regresji $\hat{y} = -2x + 14$ oraz obliczono wartość średnią zmiennej x: $\overline{x} = 4$. Jaka jest wartość średnia zmiennej y?

13. Oszacowano równanie linii regresji $\hat{y} = 2x + 7$. Obliczyć parametr a_2 równania regresji $\hat{x} = a_2 y + b_2$, jeśli $\overline{x} = 3, b_2 = -0,9$.

14. W tabeli przedstawione są obserwacje zmiennych Z i X. Ponadto wiadomo, że

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 = 4, \quad \sum_{i=1}^{5}(z_i - \overline{z})^2 = 8, \quad \sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})(z_i - \overline{z}) = 1.$$

Oszacować następujący model liniowy:

(a) $\hat{x} = az + b$,

(b) $\hat{z} = ax + b$.

z	5	3	5	2	5
x	2	4	3	2	4

Rysunek 10: Ilustracja do zadania 14.

15. Oszacowano funkcję regresji opisującą zależność zmiennej X od Z: $\hat{x} = 0,1z + 0,8$. Jaką wartość może przyjąć parametr kierunkowy linii regresji opisującej zależność zmiennej Z od X?

16. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacować parametry linii regresji II rodzaju opisującej zależność zmiennej

    (a) Y od X,
    (b) Y od Z,
    (c) Z od X,
    (d) X od Y,
    (e) Z od Y,
    (f) X od Z.

Numer obserwacji	x	y	z
1	1	0	4
2	−1	2	2
3	2	1	3
4	0	3	0
5	3	3	1

Rysunek 11: Ilustracja do zadania 16.

Bibliografia

1. *Ekonometria. Metody, przykłady, zadania* pod red. Józefa Dziechciarza