Zofia Zielińska-Kolasińska **Modele ekonometryczne – model nieliniowy z jedną zm. objaśniającą**
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

model nieliniowy z jedną zmienną objaśniającą

(wersja: 23 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Obliczanie parametrów linii regresji II rodzaju w modelach nieliniowych.

Oznaczenia i terminologia

1. Modele nieliniowe sprowadzalne do liniowych mogą mieć dwojaki charakter:
   (a) modele ekonometryczne liniowe względem parametrów, lecz nieliniowe względem zmiennych objaśniających,
   (b) modele ekonometryczne nieliniowe zarówno względem parametrów, jak i względem zmiennych objaśniających.
2. **Transformacja liniowa** Szacowanie modeli jest możliwe za pomocą KMNK po uprzedniej *transformacji liniowej*, której celem jest przekształcenie zależności regresyjnej nieliniowej w zależność regresyjną liniową za pomocą zamiany zmiennych lub podstawień.
3. Warunkiem koniecznym (ale nie dostatecznym) stosowalności tej procedury jest to, by liczba parametrów modelu nieliniowego była co najmniej równa $m + 1$ (gdzie m – liczba zmiennych modelu).
4. **Procedura transformacji (model z dwiema zmiennymi)**
   (a) Na podstawie danych empirycznych sporządamy **wykres korelacyjny** (punktowy) i na tej podstawie oceniamy możliwą postać analityczną funkcji regresji. Ważne jest, aby mieć dostatecznie dużą liczbę obserwacji.
   (b) Dokonujemy przekształcenia funkcji nieliniowej w postać liniową. Sposób sprowadzenia modelu nieliniowego do postaci liniowej zależy od jego typu
      i. nieliniowe względem zmiennych objaśniających i liniowe względem parametrów strukturalnych – wprowadzamy zmienne pomocnicze związane funkcyjnie ze zmiennymi pierwotnymi,

ii. nieliniowe zarówno względem zmiennych objaśniających, jak i parametrów strukturalnych – najpierw dokonujemy przekształcenia liniowego modelu, a następnie dokonujemy podstawień zmiennych pomocniczych.

(c) Obliczamy wartości obserwacji zmiennych pomocniczych i sporządamy wykres punktowy w nowym układzie (ze zmiennymi pomocniczymi). Jeśli punkty układają się wyraźnie wzdłuż linii prostej, oznacza to, że postać analityczna została trafnie dobrana. W przeciwnym razie szukamy innej postaci analitycznej linii regresji i wracamy do punktu 4b.

(d) Szacujemy parametry funkcji liniowej (po transformacji).

(e) Obliczamy parametry funkcji nieliniowej znając ich funkcyjne związki z parametrami postaci liniowej wynikające z transformacji.

5. **Modele Törnquista** Typowym przykładem modeli nieliniowych o postaci hiperbolicznej są *modele Törnquista*, które można określić jako mikroekonomiczne funkcje popytu. Mają one walory teoretyczne i praktyczne, ponieważ funkcja popytu jest krzywą mającą asymptotę poziomą, określaną mianem *poziomu nasycenia* danej potrzeby. Transformację modeli typu hiperbolicznego rozpoczynamy zazwyczaj od odwrócenia funkcji, a następnie dokonujemy podstawień zmiennych pomocniczych. Postacie modeli Törnquista:

$$\hat{y} = \frac{bx}{a+x},$$

$$\hat{y} = \frac{b(x-c)}{a+x},$$

$$\hat{y} = \frac{bx(x-c)}{a+x}.$$

Zadania

1. Przeprowadzono badanie zależności między dochodami a popytem na pieczywo. Obserwacje dla zmiennej miesięczne dochody (X), mierzonej w tys. zł, i zmiennej Y, prezentującej popyt na pieczywo w kg, przeprowadzono wśród 12 osób (dane umowne). Należy oszacować model popytu względem dochodów.

l.p.	Dochody (x)	Wydatki (y)
1	1,04	11,05
2	1,06	7,90
3	1,09	5,90
4	1,12	3,90
5	1,22	3,71
6	1,25	2,63
7	1,36	2,17
8	1,54	2,00
9	1,64	1,92
10	1,69	1,54
11	1,96	1,35
12	2,18	1,23

Rysunek 1: Dane do zadania 1. Wyniki obserwacji dochodów i wydatków na pieczywo

2. Sprowadzić do postaci linioewj następujący model:

$$\hat{u} = \frac{x}{ax + by^2 + c\frac{1}{v}}.$$

Zbudować macierz obserwacji na zmiennych objaśniających, potrzebną do jego oszacowania, wykorzystując dane z tabelki.

x	1	3	4	4	5	2
y	2	3	1	2	2	1
u	2	4	5	2	1	1
v	3	6	4	7	8	1

Rysunek 2: Dane do zadania 2

3. Dane są

   - model:
$$\hat{y} = a + bx_1 + cx_1^2 + d\frac{1}{x_2},$$
   - obserwacje zmiennych:
$$x_1 : 3, 6, 9, 4, 7; \qquad x_2 : 2, 4, 8, 5, 6.$$

   Zbudować macierz obseracji zmiennych objaśniających potrzebną do obliczenia ocen parametrów strukturalnych tego modelu.

4. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacować parametry strukturalne modelu
$$\hat{y} = a_1 x_1^{-1} x_2^2 + a_0.$$

y	2	3	4	5
x_1	1	1	1	2
x_2	0	1	1	2

Rysunek 3: Dane do zadania 4

5. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacować parametry strukturalne modelu
$$\hat{y} = a_1 x_1 x_2^2 + a_0.$$

y	2	3	4	5
x_1	0	1	0	2
x_2	0	1	1	1

Rysunek 4: Dane do zadania 5

6. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacować parametry strukturalne modelu
$$\hat{y} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2 + a_0.$$

y	2	3	4	5
x_1	1	1	1	2
x_2	0	1	1	4

Rysunek 5: Dane do zadania 6

7. Dane są

   - model:

   $$\hat{y} = \frac{1}{a + bx_1 + cx_1^2 + d\frac{1}{x_2}},$$

   - obserwacje zmiennych:

   $$x_1 : 3, 6, 9, 4, 7; \qquad x_2 : 2, 4, 8, 5, 6; \qquad y : 1, 5, 3, 2, 2.$$

   Zbudować macierze obseracji zmiennych objaśniających potrzebną do obliczenia ocen parametrów strukturalnych tego modelu.

8. Badano zależność kosztów jednostkowych (K) od wielkości produkcji (P). Dane znajdują się w tabeli. Ustalić postać analityczną zależności kosztów jednostkowych od wielkości produkcji. Oszacować parametry zaproponowanej funkcji.

K	1,5	2	3	4	5	7	10	14	18	22	30	38	45
P	44	43	39	36	33	28	22	16,2	12	8,5	4,5	2,33	1,33

Rysunek 6: Dane do zadania 8

9. W wyniku obserwacji zależności między
   X – długością stażu pracy (w latach)
   Y – liczbą opuszczonych dni pracy (w dniach)
   otrzymano dane znajdujące się w tabeli. Zaproponować postać analityczną modelu. Oszacować parametry zaproponowanej funkcji.

x	2	3	4	5	7	10	14	18	20	22
y	18	13	9	6	4	3	2	2	3	2

Rysunek 7: Dane do zadania 9

10. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli należy oszacować model

    (a) $\hat{y} = (ax + b)^{-1}$,

    (b) $\hat{y} = ax^2 + b$,

    (c) $\hat{y} = \frac{a}{x} + b$.

    Podać sposób transformacji tego modelu do postaci liniowej i obliczyć wartości zmiennej pomocniczej (lub zmiennych pomocniczych).

x	y
2	0,2
4	0,4
8	1,0
10	0,5
10	2,0

Rysunek 8: Dane do zadania 10

11. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oszacować model $\hat{y} = \frac{a}{x^2+b}$.

x	y
0	0,5
1	1,0
3	0,1
2	0,2

Rysunek 9: Dane do zadania 11

12. Dana jest macierz obserwacji zmiennych X, Y, Z, T, S. W celu oszacowania modeli

(a) $\hat{y} = \frac{1}{ax+b}$, (b) $\hat{y} = \frac{a}{z} + b$

dokonać transformacji do postaci liniowej oraz oblicczyć wartości zmiennych pomocniczych.

x	y	z	t	s
2	8	4	3	13
0	10	6	6	16
1	9	5	11	21
1	9	2	15	25
2	8	8	16	25

Rysunek 10: Dane do zadania 12

13. Dane są obserwacje zmiennych X, V, Z. Zapisać macierz obserwacji zmiennych objaśniających, służącą do obliczenia ocen parametrów strukturalnych modelu $\hat{y} = a + bx^{-1} + cv^2 + dv$.

14. Zmienne Q, V, X, Y, Z przyjęły wartości znajdujące się w tabelce obok. Następujące modele sprowadzić do postaci liniowej oraz podać wartości zmiennych pomocniczych:

(a) $\hat{v} = a_0 + a_1\frac{z}{x} + a_2q^2 + a_3\frac{1}{y}$, (b) $\hat{v} = a_0 + a_1\frac{z}{x} + a_2q^2 + a_3\frac{1}{x}$, (c) $\hat{v} = a_0 + a_1\frac{y}{x} + a_2q^2 + a_3\frac{1}{z}$.

x	2	10	8	4	10
v	2	3	4	5	6
z	3	4	7	8	12

Rysunek 11: Dane do zadania 13

q	v	x	y	z
1	2	1	1	3
0,5	1	2	2	4
2	4	0,5	1	2
1	3	1	4	4
3	2	4	1	2

Rysunek 12: Dane do zadania 14

15. Doprowadzić do postaci liniowej następujące zależności

    (a) $\hat{v} = \frac{x}{ay+bx+cx^2}$, (b) $\hat{v} = \frac{y}{ax+by+cy^2}$,

    oraz obliczyć wartości zmiennych pomocniczych.

Obserwacje	x	y	v
1	2	4	2
2	4	6	4
3	3	9	3
4	5	10	5
5	10	10	10

Rysunek 13: Dane do zadania 15

16. Oszacować model $\hat{x_2} = a + \frac{bx_3}{x_1}$ na podstawie danych przedstawionych w tabeli.

x_1	1	2	2	1	1
x_2	2	2	3	2	1
x_3	4	2	0	2	3

Rysunek 14: Dane do zadania 16

Bibliografia

1. *Ekonometria. Metody, przykłady, zadania* pod red. Józefa Dziechciarza