

## ĆWICZENIA

gry z naturą; kryteria: optymisty, pesymisty, Hurwicza, Bayesa, Savage'ę

(wersja: 23 listopada 2020)

---

### Zakres materiału

1. Kryterium pesymisty (Walda, maksyminowe),
2. Kryterium optymisty,
3. Kryterium Hurwicza,
4. Kryterium Bayesa,
5. Kryterium Bayesa-Laplace'a,
6. Kryterium Savage'a.

### Pojęcia wstępne

1. **Gry z naturą** *Grą z naturą* nazywamy problem decyzyjny, w którym przeciwnikiem jest natura, czyli gracz niezainteresowany wynikiem gry. Taką grę rozwiązuje się tylko z punktu widzenia jednego gracza. Istnieje kilka kryteriów decyzyjnych. Opierają się one na różnych założeniach, więc mogą dawać różne wyniki.

- (a) **Kryterium pesymisty (Walda, maksyminowe)** To kryterium zakłada, że zajdzie sytuacja najmniej korzystna, dlatego dla każdej strategii należy określić najmniejszą możliwą wartość wypłaty, a następnie wybrać strategię, która gwarantuje największą z tych najmniejszych wypłat, czyli:

$$v = \max_i \{ \min_j a_{ij} \}.$$

- (b) **Kryterium optymisty** To kryterium zakłada, że zajdzie sytuacja najbardziej korzystna, dlatego dla każdej strategii należy określić największą możliwą wartość wypłaty, a następnie wybrać strategię, która gwarantuje największą z tych największych wypłat, czyli:

$$v = \max_i \{ \max_j a_{ij} \}.$$

- (c) **Kryterium Hurwicza** W tym kryterium należy określić współczynnik ostrożności  $\gamma \in [0; 1]$ , a następnie obliczyć dla każdej strategii przeciętną wartość wygranej według wzoru

$$v_i(\gamma) = \gamma \min_j (a_{ij}) + (1 - \gamma) \max_j (a_{ij}).$$

Ostatecznie, należy wybrać tę strategię, dla której  $v_i(\gamma)$  przyjmuje największą wartość. Dla  $\gamma = 1$  kryterium Hurwicza pokrywa się z kryterium pesymisty, a dla  $\gamma = 0$  – z kryterium optymisty.

- (d) **Kryterium Bayesa** W tym kryterium zakłada się, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne i dla każdej strategii oblicza się średnią wygraną:

$$v_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę stanów natury. Ostatecznie, wybiera się strategię, która gwarantuje największą średnią wypłatę.

- (e) **Kryterium Bayesa-Laplace'a** Jeżeli znane są prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , to dla każdej strategii oblicza się wartość oczekiwaną wypłaty:

$$v_i = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}$$

i wybiera się strategię, która gwarantuje największą oczekiwaną wypłatę.

- (f) **Kryterium Savage'a** Polega na tym, że minimalizuje się oczekiwane straty wynikłe z podjęcia decyzji gorszej niż najlepsza możliwa dla danego stanu natury. Jest to kryterium dwuetapowe:

- i. **Etap I: znalezienie macierzy strat relatywnych.** Strata relatywna, to różnica między największą możliwą wygraną dla danego stanu natury, a wygraną odpowiadającą podjętej decyzji:

$$\alpha_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

- ii. **Etap II: określenie maksymalnej straty dla każdej strategii.** Należy wybrać strategię, dla której maksymalna strata jest najmniejsza, czyli:

$$v = \min_i \{ \max_j \alpha_{ij} \}.$$

## Zadania

- (a) Rolnik posiadający glebę klasy III ma wybrać pod uprawę jeden z trzech rodzajów zboża. Plony tych zbóż z 1 ha w kwintalach, w zależności od warunków pogodowych w przyszłym roku, zawiera tabela. Który z rodzajów zbóż rolnik powinien wybrać pod uprawę?

Zboże \ Stany natury	I	II	III	IV
<b>Żyto</b>	24,5	18,0	18,0	16,0
<b>Pszenica</b>	18,0	32,0	24,0	21,0
<b>Jęczmień</b>	15,0	19,0	26,0	19,0

- (b) Przedsiębiorstwo cukiernicze może produkować jeden z czterech rodzajów wypieków: ananasowiec, biszkopt, ciasteczka, lub drożdżówki. W tabeli podano zyski (straty) ze sprzedaży tych wyrobów w zależności do popytu kształtowanego przez popularność w lokalnych mediach społecznościowych (stan natury: I, II, III, IV). Wybrać wyrób do produkcji, stosując kolejno kryterium
- kryterium Hurwicza ( $\gamma = 0,2$ ),
  - kryterium Bayesa,
  - kryterium Savage'a.

Wyroby \ Stany natury	I	II	III	IV
<b>ananasowiec</b>	5	15	10	0
<b>biszkopt</b>	10	10	-20	30
<b>ciasteczka</b>	40	0	50	-30
<b>drożdżówki</b>	60	0	20	10

Hamulce \ Stany natury	A	B	C
<b>I</b>	85,0	75,0	95,0
<b>II</b>	85,0	90,0	75,5
<b>III</b>	85,0	65,0	92,0

(c) Trzy typy hamulców tramwajowych: I, II i III poddano próbom w trzech rodzajach warunków drogowych: A, B, C. Procent zadowolających prób podano w tabeli.

Wybrać do produkcji jeden z typów hamulców za pomocą

- i. kryterium Hurwicza ( $\gamma = 0,5$ ),
- ii. kryterium Bayesa,
- iii. kryterium Savage'a.

(d) Rolnik ma wybrać jeden z trzech możliwych terminów siewów: I, II, III. Plony z hektara w zależności od przyszłego możliwego stanu pogody: A, B, C i D oraz terminu siewu podano w tabeli. Podjąć decyzję o wyborze terminu siewu, jeśli rolnikowi zależy na:

- i. jak największym przeciętnym plonie z 1 ha,
- ii. jak najmniejszej stracie w stosunku do najlepszej możliwej sytuacji.

Wyroby \ Stany pogody	A	B	C	D
<b>I</b>	21,0	15,0	32,0	16,0
<b>II</b>	28,0	20,0	10,0	20,0
<b>III</b>	13,0	27,0	25,0	15,0

(e) Zrzeszenie przedsiębiorstw zamierza zwiększyć swój potencjał przemysłowy dzięki wybudowaniu nowego zakładu. Istnieją cztery warianty planu inwestycyjnego: 50, 100, 150, 200 tys. zł, które w zależności od szeregu czynników losowych (stanów natury) mogą dać różne przyrosty produkcji. Wyróżniono cztery stany natury. Za kryterium przyjęto uzyskanie możliwie dużego przyrostu produkcji w stosunku do poniesionych nakładów inwestycyjnych.

Nakłady (w tys. zł) \ Stany natury	I	II	III	IV
<b>I – 50</b>	0,5	0,6	0,4	0,5
<b>II – 100</b>	0,1	0,7	0,4	0,7
<b>III – 150</b>	0,8	0,2	0,5	0,5
<b>IV – 200</b>	0,1	0,8	0,5	0,7

Który z planów inwestycyjnych powinien wybrać dyrektor zrzeszenia:

- i. będąc pesymistą,
- ii. będąc optymistą?

- (f) Istnieje sześć możliwych wariantów wykonania pewnego przedsięwzięcia. Koszty wykonania w każdym z wariantów zależą od zespołu czynników losowych (warianty inwestycyjne realizowane są w warunkach niepewności). Można tu wyodrębnić pięć stanów natury.

Warianty inwestycyjne \ Stany natury	I	II	III	IV	V
<b>1</b>	20	50	70	10	10
<b>2</b>	10	25	50	70	60
<b>3</b>	30	50	40	20	50
<b>4</b>	20	40	40	10	70
<b>5</b>	40	30	65	70	70
<b>6</b>	30	30	60	50	40

Który z wariantów inwestycyjnych jest najkorzystniejszy dla inwestora:

- i. jeżeli nie zna on prawdopodobieństwa występowania poszczególnych stanów natury i zakłada, że wszystkie są jednakowo prawdopodobne?
  - ii. jeżeli na podstawie okresów przeszłych oszacowano prawdopodobieństwa poszczególnych stanów natury, które wynoszą odpowiednio 0,5; 0,1; 0,1; 0,2; 0,1?
- (g) Poszukiwane niesprawności odbiornika radiowego można rozpocząć od jednego z czterech układów: A, B, C, D. W tabeli podano procent udanych prób uruchomienia odbiorników w określonym czasie w zależności od kolejności szukania uszkodzeń oraz miejsca występowania uszkodzenia.

	A	B	C	D
A	80	30	10	25
B	12	90	42	36
C	25	40	85	52
D	10	70	40	95

Ustalić kolejność szukania niesprawności, jeżeli zależy nam, aby:

- i. przeciętna liczba udanych prób była największa,
  - ii. zminimalizować względne straty w stosunku do najlepszego możliwego stanu rzeczy,
  - iii. stosować kryterium Hurwicza ( $\gamma = 0,2$ ).
- (h) Właściciel straganu owocowo-warzywnego powinien podjąć decyzję dotyczącą wielkości dziennej partii zakupu truskawek. Może on nabyć 100, 120, 150, 200 łubianek po 8 zł za łubiankę. Odpowiednio od sytuacji może sprzedać dziennie 100, 130, 180, 200 łubianek i uzyskać 10 zł przychodu za łubiankę. Zakłada się, że towar nie sprzedany w danym dniu nie nadaje się do spożycia. Określić optymalny wariant decyzyjny, stosując kryterium Hurwicza ( $\gamma = 0,6$ ) i Savage'a.

## Bibliografia

1. *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach* Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz