Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

wprowadznie do teorii gier, postać normalna i ekstensywna gry, strategie czyste i mieszane

(wersja: 23 października 2020)

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Elementy gry;
2. Postać ekstensywna gry;
3. Postać normalna gry;
4. Strategie czyste i mieszane;

Pojęcia wstępne

1. **Pojęcie gry**

   (a) Teoria gier zajmuje się analizowaniem sytuacji, w których zachodzi interakcja między grupą racjonalnych graczy.

   (b) Zakłada się, że gracze podejmują decyzje strategicznie.

   (c) Interakcja oznacza takie oddziaływanie między graczami, że decyzje jednego gracza wpływają bezpośrednio na przynajmniej jednego z pozostałych graczy.

   (d) Z kolei przez racjonalność rozumie się, że podejmując decyzje, każdy gracz bierze pod uwagę istniejące między nim i innymi współzależności i próbuje działać w sposób dla siebie najbardziej korzystny.

   (e) Żeby można było mówić o grze, muszą być określone następujące elementy:

   - Gracze - kto bierze udział w grze?
   - Reguły - jakich zasad trzeba przestrzegać grając w grę? W szczególności kolejność podejmowania decyzji.
   - Strategie - jakie decyzje może podejmować każdy z graczy?
   - Wyniki - jakie są możliwe wyniki gry?
   - Wypłaty - jaką użyteczność ma każdy możliwy wynik dla każdego z graczy?

(f) W ramach teorii gier zakłada się, że gracze są racjonalni, czyli dążą do zmaksymalizowania swoich wypłat. Dodatkowo zakładamy, że:
   - każdy gracz zna reguły gry.
   - każdy gracz wie, że wszyscy znają zasady.
   - każdy gracz wie, że każdy pozostały gracz wie, że wszyscy znają zasady.
   - itd.

2. **Postać ekstensywna** Postać ekstensywna (rozwinięta) gry to reprezentacja graficzna reguł, przedstawiająca je w postaci drzewka składającego się z korzenia i gałęzi ułożonych w określonym porządku.

3. **Postać normalna** Postać normalna (strategiczna) przedstawia pełną listę graczy, możliwe strategie i wypłaty.

4. W grze dwuosobowej postać normalną można zaprezentować jako tabelę, w której wiersze odpowiadają strategiom pierwszego gracza, a kolumny - drugiego. W komórkach tabeli znajdują się wypłaty odpowiadające parom strategii, na przecięciu których leży dana komórka.

5. **Strategie czyste i mieszane** Strategia czysta, to strategia, w której każdy gracz dokonuje jednego wyboru z prawdopodobieństwem 1 i trwa przy nim. Jest ona szczególnym przypadkiem strategii mieszanej, w której gracze podejmują decyzje na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa.

Zadania

1. **Zadanie - 0 lub 1** Dwóch graczy zapisuje na kartce jednocześnie i niezależnie od siebie liczbę zero lub jeden. Jeśli zapisane liczby są takie same, to wygrywa pierwszy gracz, w przeciwnym przypadku wygrywa gracz drugi.

   (a) Określić składniki gry:
      i. zbiór graczy,
      ii. zbiór reguł (na czym polega rola graczy, jakich zasad muszą przestrzegać, jak określa się zwycięzcę),
      iii. zbiór strategii,
      iv. zbiór wyników,
      v. wypłaty (rozważyć różne przypadki: np. gra o sumie zero; różne wypłaty w zależności od cech charakteru gracza).

2. **Zadanie - gry w życiu codziennym**

   (a) Podać przykłady sytuacji z życia codziennego, które mogą być traktowane jak gry. Określić graczy, rodzaj interakcji, dostępne strategie oraz cele, które próbuje osiągnąć każdy z graczy.

3. **Zadanie - kawa** W pobliżu uczelni znajdują się kawiarnie A i B sprzedające kawę na wynos. Interakcja między kawiarniami polega na tym, że wysokość sprzedaży w kawiarni A zależy od ceny kawy w kawiarni B i vice versa.

   (a) Ustalić trzy możliwe ceny kawy i opisać jak może wyglądać zależność między przychodem w kawiarni A w zależności od ceny kawy w kawiarni B.

(b) Dla przyjętych wcześniej cen zdecydować, ile powinna kosztować kawa w kawiarni A, jeżeli kawa w kawiarni B kosztuje 7 zł.

(c) Co w sytuacji, gdyby cena w kawiarni B została podwyższona do 8 zł?

(d) Przyjąć, że:

- ceny ustalane są jednocześnie,
- ceny mogą być na poziomie 6 zł, 7 zł, 8 zł,
- koszt podania jednej kawy to 4 zł,
- dziennie wydawane jest łącznie 1000 kaw,
- kawiarnia, która ma niższą cenę, przejmuje wszystkich klientów,
- jeżeli ceny w obu kawiarniach są takie same, to klienci dzielą się na pół,
- wypłata dla kawiarni to jej dochód (przychód pomniejszony o koszty) ze sprzedaży kaw.

Napisać postać strategiczną gry.

(e) Dla poprzedniego podpunktu napisać postacie strategiczne gier w przypadku, gdy dziennie sprzedawnych jest łącznie 500 i 1500 kaw. Przyjąć, że pozostałe warunki nie ulegają zmianie.

(f) Dla warunków z podpunktu 3d) napisać postać strategiczną gry w przypadku, gdy kawiarnia z kawą w niższej cenie przyciąga 75% klientów. Przyjąć, że pozostałe warunki nie ulegają zmianie.

(g) Dla warunków z podpunktu 3d) napisać postać strategiczną gry w przypadku, gdy kawiarnia A sprzedaje smaczniejszą kawę i w związku z tym, gdy ceny w obu kawiarniach są takie same, kawiarnia A przyciąga 75% klientów. Przyjąć, że pozostałe warunki nie ulegają zmianie.

4. **Zadanie - cukierki** Rozważyć następujący problem decyzyjny. Na stole stoją miski z czterema rodzajami cukierków: ananasowe (A), bananowe (B), czereśniowe (C), daktylowe (D), spośród których należy wybrać dokładnie dwa rodzaje.

   (a) Przedstawić problem w postaci ekstensywnej.

   (b) Po wybraniu dwóch rodzajów słodyczy należy zdecydować, cukierków którego typu weźmie się kilka (K), a którego tylko jeden (J). Uzupełnić postać ekstensywną.

   (c) Przyjąć, że wzięcie kilku cukierków daje *dużą* przyjemność, a wzięcie jednego cukierka - *małą*. Uzupełnić wypłaty w postaci ekstensywnej gry.

5. **Zadanie - postać ekstensywna gry**

   (a) Wyjaśnić dlaczego można zapisać grę w postaci ekstensywnej na przynajmniej tyle sposobów, ilu jest graczy.

6. **Zadanie - grzybiarze** Grzybiarze Adam i Bartosz wybierają się do lasu. Obaj chcą dostać się w to samo miejsce. Ten, który dotrze pierwszy, zbierze wszystkie grzyby. Grzybiarze mogą poruszać się samochodem, pociągiem lub rowerem.

   (a) Narysować postać ekstensywną gry zakładając, że podejmując swoją decyzję, gracz drugi zna decyzję gracza pierwszego.

   (b) Narysować postać ekstensywną gry zakładając, że gracze podejmują swoje decyzje jednocześnie. Pamiętać o oznaczeniu zbiorów informacyjnych.

(c) Dla poprzedniego podpunktu, obliczyć liczbę strategii gracza drugiego. Pamiętać o tym, że każda strategia gracza drugiego musi składać się z trzech komponentów (po jednym dla każdego z węzłów decyzyjnych).

(d) Dla poprzednich dwóch podpunktów, narysować grę w postaci strategicznej, przy czym przyjąć, że Adam dociera na miejsce jako pierwszy, jeżeli:

- Adam porusza się pociągiem (niezależnie od decyzji podjętej przez Bartosza),
- Adam porusza się rowerem, a Bartosz nie porusza się pociągiem,
- obaj poruszają się samochodami.

Za wypłaty przyjąć 1 w przypadku grzybiarza, który dociera na miejsce jako pierwszy i 0 dla drugiego.

7. **Zadanie - gra NIM** Na stole leżą dwa stosy patyczków. Gracze kolejno zabierają dowolną, niezerową liczbę patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu (w każdej turze można wybrać dowolny stos). Wygrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek.

(a) Stosy zrównoważone.

i. Pokazać, że drugi gracz ma strategię wygrywającą w każdym z poniższych przypadków:

A. w każdym stosie jest po jednym patyczku: $(1, 1)$.

B. w każdym stosie są po dwa patyczki: $(2, 2)$.

C. w każdym stosie jest po $n > 2$ patyczków: (n, n).

ii. Dla ostatniego przypadku pokazać, że drugi gracz ma dokładnie jedną strategię prowadzącą do zwycięzca (czyli: jeżeli drugi gracz nie postępuje zgodnie z tą strategią, gracz pierwszy może wykorzystać to na swoją korzyść i stanąć na pozycji, która prowadzi do zwycięstwa).

(b) Stosy niezrównoważone.

i. Narysować postać ekstensywną gry dla przypadku $(3, 2)$. Przyjąć, że wypłata w przypadku wygranej wynosi 1, a przegranej 0.

ii. Rozważyć jak ta sytuacja ma się do poprzednich i wykazać, że pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

iii. Narysować postać strategiczną gry dla konfiguracji $(2, 1)$. Nie trzeba uzupełniać wszystkich wypłat w tabeli.

(c) Wersja z trzeba stosami. Reguły gry pozostają bez zmian oprócz tego, że tym razem patyczki ułożone są w trzech stosach.

i. Pokazać, że jeżeli każdy stos składa się z jednego patyczka $(1, 1, 1)$, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

ii. Pokazać, że jeżeli każdy stos składa się z jednego patyczka $(2, 2, 2)$, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

iii. Pokazać, że jeżeli każdy stos składa się z takiej samy liczby patyczków (n, n, n), gdzie $n \in \mathbb{N}$, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

iv. Pokazać, że jeżeli dwa stosy składają się z jednego patyczka $(1, 1, n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

v. Pokazać, że jeżeli dwa stosy składają się z dwóch patyczków $(2, 2, n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

vi. Pokazać, że jeżeli dwa stosy składają się z takiej samy liczby patyczków (n, n, k), gdzie $n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$, to gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

vii. Pokazać, że jeżeli stosy składają się z patyczków w konfiguracji $(1, 2, 3)$ (lub jej dowolnej permutacji), to gracz drugi ma strategię wygrywającą.

viii. Korzystając z poprzedniego podpunktu wykazać, że dla każdej początkowej konfiguracji patyczków $(1, 2, n)$, $(1, n, 3)$, $(n, 2, 3)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

(d) Postać strategiczna gry. Przyjąć, że wypłata w przypadku wygranej wynosi 1, a przegranej -1.

i. Rozważyć przypadek $(2, 1)$ i zapisać grę w postaci ekstensywnej.

ii. Rozważyć przypadek $(2, 1)$ i przedstawić grę w postaci strategicznej.

8. **Zadanie - gra MARIENBAD** Na stole leżą dwa stosy patyczków. Gracze kolejno zabierają dowolną, niezerową liczbę patyczków z jednego, wybranego przez siebie stosu (w każdej turze można wybrać dowolny stos). Przegrywa gracz, który zabierze ostatni patyczek.

(a) Stosy zrównoważone

i. Rozważyć przypadek, kiedy w każdym stosie jest po jednym patyczku: $(1, 1)$. Wykazać, że gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

ii. Rozważyć przypadek, kiedy w każdym stosie są po dwa patyczki: $(2, 2)$. Wykazać, że gracz drugi ma strategię wygrywającą.

iii. Narysować postać ekstensywną gry dla przypadku $(3, 3)$. Przyjąć, że wypłata w przypadku wygranej wynosi 1, a przegranej 0.

iv. Rozważyć przypadek, kiedy w każdym stosie jest po $n > 2$ patyczków: (n, n). Wykazać, że gracz drugi ma strategię wygrywającą.

(b) Stosy niezrównoważone

i. Wykazać, że w takiej sytuacji gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

9. **Zadanie - głosowanie** W przetargu biorą udział firmy A i B. Komisja składa się z trzech członków, którzy głosują, aby wyłonić zwycięzcę. Możliwe wyniki, to wybór firmy A, wybór firmy B lub odrzucenie obu ofert (O). Wybór oznacza uzyskanie większości w głosowaniu. Głosowanie jest dwustopniowe i przebiega następująco:

- najpierw wybiera się jedną z firm A lub B,
- następnie wybiera się pomiędzy zwycięzcą z poprzedniego kroku a odrzuceniem obu ofert.

Każdy członek komisji ma inne preferencje co do dostępnych opcji:

- członek 1: woli A od O i O od B,
- członek 2: woli B od A i A od O,
- członek 3: woli O od A i A od B.

(a) Przeanalizować grę w przypadku, gdy członkowie komisji głosują zgodnie ze swoimi przekonaniami.

(b) Przeanalizować grę w przypadku, kiedy trzeci członek komisji głosuje strategicznie i wybiera w pierwszym głosowaniu B zamiast O.

(c) Przeanalizować grę w przypadku, kiedy drugi członek komisji, podejrzewając, że trzeci gracz będzie głosował strategicznie, sam głosuje strategicznie i wybiera w pierwszym głosowaniu A zamiast B.

(d) Wykazać, że w drugiej rundzie głosowania żaden z graczy nie poprawi swojej sytuacji głosując w sposób inny, niż zgodny ze swoimi przekonaniami.

(e) Przyjąć, że preferencje trzeciego członka są następujące: woli O od B, woli B od A.

i. Jaki byłby wynik głosowania, gdyby trzeci członek głosował zgodnie z przekonaniami?

ii. Jaki byłby wynik głosowania, gdyby trzeci członek głosował strategicznie?

(f) Przyjąć, że dla każdego członka wypłata wynosi:

- 1 w przypadku wybrania najbardziej preferowanej przez niego decyzji,
- 0 w przypadku wybrania drugiej w kolejności preferowanej przez niego decyzji,
- -1 w przypadku wybrania najmniej preferowanej przez niego decyzji.

Narysować grę w postaci ekstensywnej. Doprowadzić ilustrację do końca tylko w przypadku dwóch możliwych wyników. Wypisać na końcu gałęzi wypłaty. Pamiętać o zaznaczeniu zbiorów informacyjnych.

10. **Zadanie - dylemat więźnia** Dwóch przestępców zostało złapanych przez policję i umieszczonych w osobnych celach. Z powodu braku dowodów przestępstwa, nie można im udowodnić winy. Policja stara się nakłonić ich do zeznań przeciwko sobie:

(a) Jeżeli obaj więźniowie będą współpracować z policją, każdy z nich dostanie karę pięciu lat więzienia.

(b) Jeżeli tylko jeden będzie współpracował, wtedy cała wina spadnie na drugiego, który pójdzie do więzienia na dziesięć lat, a współpracujący wyjdzie od razu na wolność.

(c) Jeżeli żaden z więźniów nie zgodzi się współpracować z policją, obaj dostaną karę jednego roku więzienia za brawurową ucieczkę samochodem.

i. Zapisać postać strategiczną gry.

ii. Zapisać postać strategiczną gry z alternatywnymi wypłatami, które:

A. odpowiadają założeniom dylematu więźnia,

B. nie odpowiadają założeniom dylematu więźnia.

iii. Zapisać postać ekstensywną gry. Pamiętać o zaznaczeniu zbiorów informacyjnych.

iv. Przyjąć, że możliwa jest jeszcze trzecia decyzja, polegająca na częściowym zeznawaniu. Postać strategiczna gry podana jest w tabeli (liczby oznaczają długość zasądzonego wyroku więzienia).

więzień I \więzień II	**współpracuje**	**nie współpracuje**	**częściowo współpracuje**
współpracuje	$2, 2$	$0, 5$	$1, 3$
nie współpracuje	$5, 0$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$4, \frac{1}{4}$
częściowo współpracuje	$3, 1$	$\frac{1}{4}, 4$	$1, 1$

A. Zdecydować, czy prawdą jest, że dla pierwszego więźnia korzystnie jest współpracować z policją niezależnie od tego, jaką decyzję podejmie drugi więzień.

B. Czy w grze jest możliwy inny sensowny wynik, niż współpracowanie z policją przez obu więźniów?

11. **Zadanie - podział 10 zł** Dwie osoby mają do podziału 10 zł. Pierwszy gracz może zaoferować, że przekaże drugiemu kwotę równą 0 zł, 2,5 zł, 5 zł, 7,50 zł lub 10 zł. Drugi gracz może się zgodzić na propozycję lub ją odrzucić. Jeżeli drugi gracz zaakceptuje propozycję, to dostaje kwotę, na którą się zgodził, a pierwszy gracz zachowuje resztę pieniędzy. Jeżeli drugi gracz odrzuci propozycję, żadne z graczy nie otrzymuje pieniędzy.

(a) Narysować postać ekstensywną gry.

(b) Wypisać strategie pierwszego gracza.

(c) Wypisać kilka możliwych strategii drugiego gracza.

(d) Napisać grę w postaci strategicznej. Nie trzeba wypisywać wszystkich strategii gracza drugiego.

(e) Rozważyć modyfikację gry polegającą na tym, że jeżeli gracz drugi nie akceptuje propozycji złożonej przez pierwszego gracza, to może złożyć własną propozycję graczowi pierwszemu. Gracz pierwszy może ją zaakceptować lub odrzucić. Jeżeli żadna z propozycji nie zostaje zaakceptowana, żaden z graczy nie otrzymuje pieniędzy. Jeżeli którakolwiek z propozycji zostaje zaakceptowana, pieniądze dzielone są zgodnie z ustaleniem. Narysować postać ekstensywną gry.

(f) Rozważyć modyfikację gry polegającą na tym, że gracze podejmują decyzje jednocześnie:
   - gracz pierwszy składa ofertę,
   - gracz drugi ustala jaką najmniejszą kwotę chciałby dostać.

   Jeżeli oferta gracza pierwszego jest przynajmniej tak wysoka, jak kwota ustalona przez drugiego gracza, to dochodzi do podziału zgodnie z ofertą. W przeciwnym przypadku nie dochodzi do porozumienia i żaden z graczy nie dostaje żadnych pieniędzy. Narysować postać ekstensywną gry.

(g) Dla ostatniego podpunktu, zapisać grę w postaci strategicznej.

12. **Zadanie - wspólny projekt** Andrzej, Barbara i Cezary mają do wykonania wspólny projekt. Każdy student może pracować *ciężko* (C) lub *unikać wysiłku* (U). Projekt będzie oceniany w skali od 0 do 5 według następujących zasad:
   - jeżeli wszyscy studenci pracują ciężko, dostaną 5,
   - jeżeli przynajmniej dwóch studentów pracuje ciężko, dostaną 4,
   - jeżeli tylko jeden student pracuje ciężko, dostaną 3,
   - jeżeli nikt nie pracuje ciężko, dostaną 0.

   (a) Napisz taką funkcję użyteczności u, która zależy od oceny i wkładu pracy (np. wypłata w przypadku ciężkiej pracy i otrzymania oceny 4, to $u(C, 4)$). Przyjmij, że studenci preferują lepszą ocenę od gorszej, ale jednocześnie wolą unikać wysiłku niż pracować ciężko (np. $u(U, 4) > u(C, 4) > u(C, 4)$).

   (b) Korzystając poprzedniego podpunktu narysuj postać ekstensywną gry.

   (c) Rozważyć dwa oddzielne przypadki:
      i. Cezary pracuje ciężko,
      ii. Cezary unika pracy.

      Dla każdego z nich narysować postać strategiczną gry.

13. **Zadanie - kółko i krzyżyk**

   (a) Przeanalizować grę w kółko i krzyżyk. Czy w tej grze jest strategia wygrywająca?

Bibliografia

1. *Sztuka strategii* A. K. Dixit, B. J. Nalebuff

2. *Strategia* J. Watson