Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Wstęp do matematyki – zbiory

UNIWERSYTET PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

zbiór, element zbioru, inkluzja i równość zbiorów; suma, iloczyn, różnica, różnica symetryczna i dopełnienie zbiorów; prawa rachunku zbiorów

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Pojęcia:
   (a) zbiór,
   (b) element zbioru,
   (c) zbiór skończony,
   (d) zbiór pusty,
   (e) zbiór niepusty,
   (f) inkluzja/zawieranie zbiorów,
   (g) podzbiór,
   (h) podzbiór właściwy,
   (i) nadzbiór,
   (j) równość zbiorów,
   (k) zbiory rozłączne;
2. Działania na zbiorach:
   (a) suma zbiorów $\cup$
   (b) iloczyn zbiorów $\cap$
   (c) różnica zbiorów $\setminus$
   (d) różnica symetryczna zbiorów $\dot{-}$
   (e) dopełnienie/uzupełnienie zbioru $'$
3. Prawa rachunku/algebry zbiorów:
   (a) prawa przemienności dodawania i mnożenia,
   (b) prawa łączności dodawania i mnożenia,
   (c) związki dodawania i mnożenia ze zbiorem pustym,
   (d) prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania i dodawania względem mnożenia,
   (e) prawa idempotentności,
   (f) prawa pochłaniania,
   (g) prawa de Morgana.

Oznaczenia i terminologia

1. **Zbiór** *Zbiór* jest tzw. pojęciem pierwotnym, tj. takim, którego nie definiujemy, ale którym się posługujemy w rozwijaniu zagadnień.

2. **Element zbioru**
   (a) Przedmioty należące do zbioru nazywamy jego *elementami*.
   (b) Jeżeli element a należy do zbioru Z, to piszemy $a \in Z$ i czytamy "a należy do Z" lub "a jest elementem zbioru Z".
   (c) Jeżeli element m nie należy do zbioru Z, to piszemy $m \notin Z$.
   (d) Zbiór, którego elementami są $a, b, c, \ldots$ zapisujemy $\{a, b, c, \ldots\}$.
   (e) Jeżeli a jest jedynym elementem zbioru A, to piszemy $A = \{a\}$.
   (f) Dwa różne zbiory mogą zawierać elementy wspólne.

3. **Zbiór skończony** Niektóre zbiory składają się ze skończonej liczby elementów – są to *zbiory skończone*.

4. **Zbiór pusty** Zbiór, który nie zawiera żadnego elementu nazywa się *zbiorem pustym* i oznacza symbolem $\emptyset$.

5. **Zbiór niepusty** Zbiór, do którego należy przynajmniej jeden element nazywa się *zbiorem niepustym*.

6. **Inkluzja/zawieranie zbiorów**
   (a) Jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B, to mówimy, że zbiór A jest *zawarty* w zbiorze B albo że zbiór B *zawiera* zbiór A.
   (b) Piszemy wtedy $A \subset B$ lub $B \supset A$ i czytamy "A jest zawarty w B" lub "B zawiera A".
   (c) Zbiór A nazywa się *częścią* albo *podzbiorem* zbioru B, a zbiór B – *nadzbiorem* zbioru A.
   (d) Zbiór pusty $\emptyset$ jest podzbiorem każdego zbioru.
   (e) Relacja zawierania jest *przechodnia*, tzn., że jeżeli $A \subset B$ oraz $B \subset C$, to $A \subset C$, czyli

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C.$$

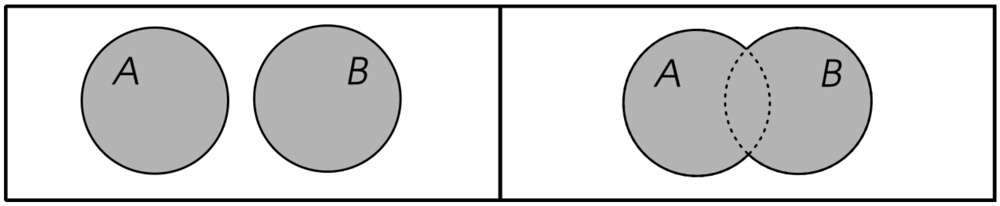
7. **Równość zbiorów** Jeżeli $A \subset B$ oraz $B \subset A$, to mówimy, że zbiory są *identyczne* (*równe*) i piszemy $A = B$. Wtedy każdy element zbioru A należy do zbioru B i każdy element zbioru B należy do zbioru A.

8. **Podzbiór właściwy** Jeżeli $A \subset B$, ale $B \not\subset A$, to A nazywamy *pozbiorem właściwym* zbioru B.

9. **Zbiory rozłączne** Dwa zbiory nie mające wspólnych elementów nazywamy *rozłącznymi*.

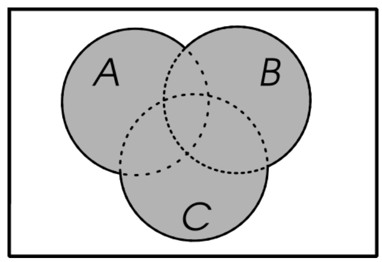
10. **Działania na zbiorach**
    (a) **Suma zbiorów** $\cup$
        i. *Sumą zbiorów A i B* nazywamy taki zbiór C, do którego należą wszystkie elementy zbiorów A i B i żadne inne. Piszemy $C = A \cup B$ (rys. 1). Zatem

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B).$$



Rysunek 1: Suma dwóch zbiorów: $A \cup B$.

ii. Pojęcie sumy dwóch zbiorów można uogólnić na dowolną (skończoną) liczbę składników. Sumą n zbiorów nazywamy zatem zbiór, którego każdy element należy przynajmniej do jednego z danych zbiorów. Nie wyklucza się więc, że jakiś element należy równocześnie do kilku składników (rys. 2).



Rysunek 2: Suma trzech zbiorów: $A \cup B \cup C$.

iii. Dodawanie zbiorów podlega dwóm prawom:

A. *prawu przemienności*

$$A \cup B = B \cup A,$$

B. *prawu łączności*

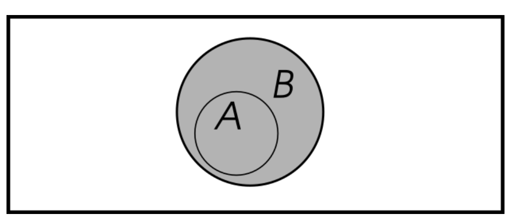
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

iv. Stwierdzamy również, że

A. $A \cup A = A$,

B. $A \cup \emptyset = A$,

C. Jeżeli $A \subset B$, to $A \cup B = B$ (rys. 3).

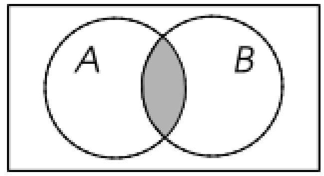


Rysunek 3: Jeżeli $A \subset B$, to $A \cup B = B$.

(b) **Iloczyn zbiorów $\cap$**

i. Zbiór C, którego elementy należą zarówno do A, jak i do B, nazywamy *iloczynem zbiorów A i B*. Piszemy $C = A \cap B$ (rys. 4). Zatem

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$



Rysunek 4: Iloczyn dwóch zbiorów: $A \cap B$.

ii. Iloczyn zbiorów można utworzyć dla dowolnej (skończonej) liczby czynników.

iii. Iloczyn zbiorów podlega dwóm prawom:

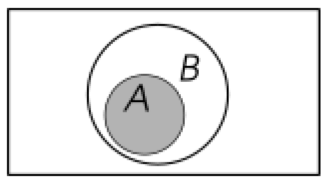
A. *prawu przemienności*

$$A \cap B = B \cap A,$$

B. *prawu łączności*

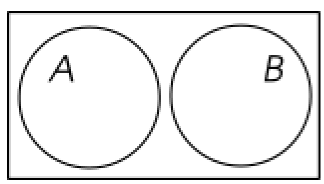
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

iv. Jeżeli $A \subset B$, to $A \cap B = A$ (rys. 5).



Rysunek 5: Jeżeli $A \subset B$, to $A \cap B = A$.

v. Zbiory A i B są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$ (rys. 6).

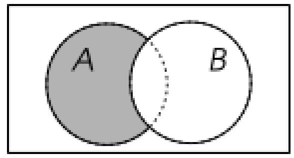


Rysunek 6: Iloczyn zbiorów rozłącznych jest zbiorem pustym $\emptyset$.

(c) **Różnica zbiorów** $\setminus$

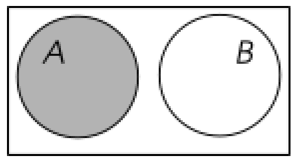
i. Zbiór C tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A, a nie należą do zbioru B, nazywamy *różnicą zbiorów A i B*. Piszemy $C = A \setminus B$ (rys. 7). Zatem

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B).$$



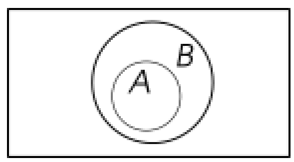
Rysunek 7: Różnica dwóch zbiorów: $A \setminus B$.

ii. Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, to $A \setminus B = A$, bo każdy element, który należy do A nie należy do B (rys. 8).



Rysunek 8: Różnica dwóch zbiorów rozłącznych: $A \setminus B$.

iii. Jeżeli $A \subset B$, to $A \setminus B = \emptyset$ (rys. 9).

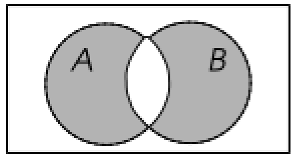


Rysunek 9: Jeżeli $A \subset B$, to $A \setminus B = \emptyset$.

(d) **Różnica symetryczna zbiorów $\dot{-}$**

i. Zbiór C tych wszystkich elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A i B nazywamy *różnicą symetryczną zbiorów A i B*. Piszemy $C = A \dot{-} B$ (rys. 10). Zatem

$$x \in A \dot{-} B \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \notin A) \wedge (x \in B)].$$

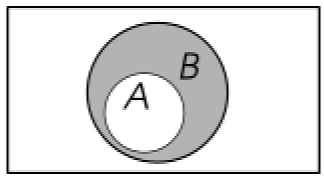


Rysunek 10: Różnica symetryczna dwóch zbiorów: $A \dot{-} B$.

ii. Definicja formalna:

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

iii. Jeżeli $A \subseteq B$, to $A \dot{-} B = B \setminus A$ (rys. 11).



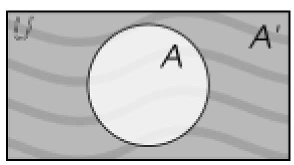
Rysunek 11: Jeżeli $A \subseteq B$, to $A \dot{-} B = B \setminus A$.

(e) **Dopełnienie/uzupełnienie zbioru** $'$

i. Niech dany będzie zbiór U, zwany *przestrzenią*, oraz jego podzbiór $A \subseteq U$. *Dopełnieniem* zbioru A nazywa się różnicę

$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\},$$

oznaczaną zwykle symbolem A' (rys. 12). Jest to zbiór wszystkich elementów pewnego ustalonego nadzbioru, które do danego zbioru nie należą.



Rysunek 12: Zbiór A' – dopełnienie zbioru A w przestrzeni U.

ii. Z definicji wynika, że dopełnienie zbioru zależy od wyboru przestrzeni.

iii. Korzystając z pojęcia dopełnienia zbiorów, różnicę zbiorów $A, B \subseteq U$ można zapisać w postaci:

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

iv. Dla dowolnej przestrzeni U prawdziwe są równości

A. $\emptyset' = U$,

B. $U' = \emptyset$.

v. Dla ustalonej przestrzeni U i dowolnego $A \subseteq U$ zachodzi $(A')' = A$.

vi. Zbiór i jego dopełnienie są rozłączne

$$A \cap A' = \emptyset.$$

vii. Suma zbioru i jego dopełnienia daje całą przestrzeń

$$A \cup A' = U.$$

viii. Dla danych $A, B \subseteq U$ zachodzą prawa

A. $(A \cup B)' = A' \cap B'$,

B. $(A \cap B)' = A' \cup B'$,

znane jako *prawa de Morgana*.

ix. Jeżeli $B = A'$, to $B' = A$.

Twierdzenia

1. **Prawa rachunku/algebry zbiorów** Związki dotyczące działań na zbiorach i zachodzące dla dowolnych zbiorów nazywane są *prawami rachunku zbiorów* lub *prawami algebry zbiorów*.

   (a) **Prawa przemienności** Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzą

   i. **prawo przemienności dodawania** $A \cup B = B \cup A$,

   ii. **prawo przemienności mnożenia** $A \cap B = B \cap A$.

   (b) **Prawa łączności** Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą

   i. **prawo łączności dodawania** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

   ii. **prawo łączności mnożenia** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

   (c) **Związki dodawania i mnożenia ze zbiorem pustym** Dla dowolnego zbior A zachodzą

   i. $A \cup \emptyset = A$,

   ii. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

   (d) **Prawa rozdzielności** Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą

   i. **prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

   ii. **prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   (e) **Prawa idempotentności** Dla dowolnego zbioru A zachodzą

   i. $A \cup A = A$,

   ii. $A \cap A = A$.

   (f) **Prawa pochłaniania** Dla zbiorów A, B takich, że $A \subseteq B$, zachodzą

   i. $A \cup B = B$,

   ii. $A \cap B = A$.

   (g) **Prawa de Morgana** Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą

   i. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

   ii. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Przydatne wzory

1. **Pierwiastki równania kwadratowego** Liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

   (a) jeżeli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych,

   (b) jeżeli $\Delta = 0$, to równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$,

(c) jeżeli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Zadania

1. Zapisać zbiór pierwiastków równania

   (a) $x^2 - 16x + 64 = 0$, (b) $x^2 - 3x + 10 = 0$, (c) $x^2 - 4x = 0$

   i określić jego liczebność.

2. Obliczyć

   (a) sumę,
   (b) iloczyn,
   (c) różnicę,
   (d) różnicę symetryczną

   zbiorów A, B określonych następująco

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, (b) $A = [0, 4)$, $B = [3, 6)$.

3. Wyznaczyć i naszkicować na osi liczbowej lub w układzie współrzędnych zbiory

   (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$, (d) $B \setminus A$, (e) $A \dot{-} B$,

   jeśli zbiory A i B określone są następująco:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$,
   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$,
   (c) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq 0\}, B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x + y < 3\}$,
   (d) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}, B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x = |y|\}$,
   (e) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}, B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x + y < 2\}$.

4. Dla dowolnych zbiorów A, B, C zilustrować za pomocą diagramów Venna równości

   (a) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$,
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   (d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   (e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
   (f) $A' \cap B' = (A \cup B)'$,
   (g) $A' \cup B' = (A \cap B)'$,
   (h) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
   (i) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
   (j) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (k) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$,
   (l) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$,
   (m) $A \dot{-} \emptyset = A$,
   (n) $A \dot{-} A = \emptyset$,
   (o) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$.

5. Korzystając z diagramów Venna sprawdzić, czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzą następujące równości:

(a) $(A \cup B) \setminus B = A$?

(b) $(A \setminus B) \cup B = A$?

6. Korzystając z diagramów Venna sprawdzić, jaka musi być zależność między zbiorami A i B żeby zachodziło

   (a) $(A \cup B) \setminus B = A$,

   (b) $(A \setminus B) \cup B = A$.

Bibliografia

1. *Wykłady ze wstępu do matematyki* W. Guzicki, P. Zakrzewski
2. *Matematyka t. I* K. Szałajko
3. *Analiza matematyczna w zadaniach część I* W. Krysicki, L. Włodarski