Zofia Zielińska-Kolasińska
Instytut Matematyki
Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

UNIWERSYTET
PRZYRODNICZO-HUMANISTYCZNY W SIEDLCACH

ĆWICZENIA

zdania logiczne, funktory zdaniotwórcze (spójniki), prawa rachunku zdań

Żeby w jak największym stopniu skorzystać z ćwiczeń, wszystko to, co jest w części teoretycznej (oznaczenia, terminologia, twierdzenia, wzory) trzeba rozumieć i znać na pamięć.

Zakres materiału

1. Zdanie w sensie logicznym,
2. Wartość logiczna,
3. Funktory zdaniotwórcze:
   (a) negacja,
   (b) koniunkcja/iloczyn logiczny zdań ($\wedge$),
   (c) alternatywa/suma logiczna zdań ($\vee$),
   (d) implikacja/wynikanie ($\Rightarrow$),
   (e) równoważność zdań ($\Leftrightarrow$, $\equiv$),
4. Tautologia, kontrtautologia,
5. Prawa rachunku zdań,
6. Reguły dowodzenia.

Oznaczenia i terminologia

1. **Zdanie w sensie logicznym, wartość logiczna** W logice termin *zdanie* oznacza tylko takie zdanie gramatyczne, któremu można przyporządkować *wartość logiczną*, tzn., o którym można powiedzieć czy jest *prawdą*, czy *fałszem*.
2. Prawdę oznacza się przez 1 (lub $+$), a fałsz przez 0 (lub $-$).
3. **Funktory zdaniotwórcze**
   (a) **Negacja ($\neg$, $\sim$)** Jeżeli p jest *prawdą*, to q jest fałszem, i na odwrót, jeżeli p jest *fałszem*, to q jest *prawdą* – wówczas zdanie q jest zaprzeczeniem zdania p. Wartość logiczna zobrazowana jest za pomocą tabelki:

p	$q(\sim p)$
1	0
0	1

(b) **Koniunkcja/iloczyn logiczny zdań ($\wedge$)** Z dwóch zdań p i q tworzymy nowe zdanie "$p \wedge q$", które czytamy "p i q" (symbol $\wedge$ zastępuje tu spójnik "i"). Zdania p i q nazywamy *czynnikami koniunkcji*. Wartość logiczna zobrazowana jest za pomocą tabelki:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Koniunkcja jest zdaniem prawdziwym tylko wtedy, gdy oba czynniki są prawdziwe.

(c) **Alternatywa/suma logiczna zdań ($\vee$)** Z dwóch zdań p i q tworzymy nowe zdanie "$p \vee q$", które czytamy "p lub q" (symbol $\vee$ zastępuje tu spójnik "lub"). Zdania p i q nazywamy *składnikami alternatywy*. Wartość logiczna zobrazowana jest za pomocą tabelki:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Alternatywa jest zdaniem fałszywym tylko wtedy, gdy oba czynniki są fałszywe, natomiast we wszystkich pozostałych przypadkach jest prawdziwa.

(d) **Implikacja/wynikanie ($\Rightarrow$)** Z dwóch zdań p i q tworzymy nowe zdanie "$p \Rightarrow q$", które czytamy "jeżeli p, to q" lub "ze zdania p wynika zdanie q" lub "p implikuje q". Zdanie p nazywamy *poprzednikiem*, a zdanie q *następnikiem implikacji*. Wartość logiczna zobrazowana jest za pomocą tabelki:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja jest zdaniem fałszywym tylko wtedy, gdy poprzednik jest zdaniem prawdziwym, a następnik fałszywym, natomiast we wszystkich pozostałych przypadkach jest prawdziwa. Oznacza to, że z prawdy może wynikać tylko prawda, a z fałszu zarówno prawda, jak i fałsz.

(e) **Równoważność zdań ($\Leftrightarrow, \equiv$)** Jeśli jednocześnie zachodzą implikacje $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$, to piszemy $p \Leftrightarrow q$ lub $p \equiv q$ i czytamy "p jest równoważne q" albo "p zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy q", albo "p jest prawdziwe (fałszywe) wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe (fałszywe) jest q". Wartość logiczna zobrazowana jest za pomocą tabelki:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Twierdzenia

1. **Prawa/tautologie rachunku zdań** Za pomocą funktorów zdaniotwórczych możemy tworzyć różne zdania złożone. Interesować nas będą tylko takie zdania złożone, które będą prawdziwe bez względu na wartości logiczne zmiennych zdaniowych, z których te zdania są zbudowane. Są to *prawa* albo *tautologie rachunku zdań* (schemat wyłącznie fałszywych zdań to *kontrtautologia*). Prawa te mogą być dowiedzione metodą *zero-jedynkową*, która polega na rozważaniu wszystkich możliwych kombinacji zer (fałszu) i jedynek (prawdy). Procedurę sprawdzania tautologiczności schematów rachunku zdań można skrócić, nie wykonując tych podstawień, o których w drodze prostego rozumowania ustalamy, że schemat redukuje się przy nich do symbolu prawdy.

   (a) **Prawo tożsamości** $p \Rightarrow p$ (każde zdanie implikuje siebie) lub, ogólnie, $p \equiv p$,

   (b) **Prawo podwójnego przeczenia** $p \Leftrightarrow \sim (\sim p)$ (dowolne zdanie równoważne jest podwójnej negacji tego zdania),

   (c) **Prawo wyłączonego środka** $p \vee \sim p$ (z dwóch zdań: zdania lub jego zaprzeczenia, jedno zawsze jest prawdziwe),

   (d) **Prawo sprzeczności** $\sim (p \wedge \sim p)$ (nie może być jednocześnie prawdziwe zdanie i jego zaprzeczenie),

   (e) **Prawo sprowadzania do sprzeczności** $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (z założenia o nieprawdziwości tezy wyprowadza się sprzeczność ze zdaniem prawdziwym (założenie nieprawdziwości twierdzenia prowadzi do sprzeczności), co pozwala przyjąć, że zaprzeczenie tezy jest fałszywe, a sama teza prawdziwa)),

   (f) **Prawo sylogizmu/przechodniości implikacji** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (jeżeli z jednego zdania wynika drugie i z drugiego trzecie, to z pierwszego wynika trzecie),

   (g) **Prawa de Morgana**:

      i. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń)

      ii. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (zaprzeczenie alternatywy jest równoważne koniunkcji zaprzeczeń)

   (h) **Prawo kontrapozycji** (jedno z praw transpozycji) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (jeżeli z jednego zdania wynika drugie, to z zaprzeczenia drugiego wynika zaprzeczenie pierwszego).

2. **Reguły dowodzenia**

   (a) **Reguła odrywania** $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (jeżeli z jednego zdania wynika drugie i pierwsze jest prawdziwe, to drugie należy uznać za prawdziwe),

   (b) **Reguła dołączania koniunkcji** Jeżeli prawdą jest p oraz prawdą jest q, to prawdą jest $p \wedge q$,

   (c) **Reguła dołączania alternatywy** Jeżeli prawdą jest p, to prawdą jest $p \vee q$,

   (d) **Prawo dołączonej równoważności** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$,

   (e) **Prawo sylogizmu warunkowego** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

   (f) **Reguła dowodzenia nie wprost** $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Zadania

1. Zbuduj schematy podanych zdań. Wskaż w każdym z nich funktory i ich argumenty.

   (a) Przyjąłeś fałszywe założenia lub popełniłeś błąd w rozumowaniu.

(b) Rozumiesz treść mojej wypowiedzi zawsze i tylko wtedy, gdy potrafisz wyrazić ją własnymi słowami.

(c) Jeżeli myślisz jasno, to nieprawda, że nie potrafisz jasno wyrazić swojej myśli.

(d) Jesteś inteligentny i nieprawda, że masz złą pamięć.

(e) Jeżeli nieprawda, że twierdzenia matematyki mogą okazać się falszywe, to nieprawda, że twierdzenia logiki mogą okazać się falszywe.

(f) Geometria Łobaczewskiego jest niesprzeczna lub nieprawda, że geometria Euklidesa jest niesprzeczna.

(g) Światło ma naturę korpuskularną zawsze i tylko wtedy, gdy nieprawda, że ma naturę falową.

(h) Nieprawda, że jeżeli Einstein był genialny, to Newton był ograniczony.

(i) Jeżeli historia tłumaczy zdarzenia minione i pozwala przewidywać przyszłość, to jest nauką nomotetyczną.

(j) Jeżeli prawa dziejowe nie istnieją lub są niewykrywalne, to historia jest nauką idiograficzną.

(k) Nieprawda, że jeśli spory filozoficzne są nierozstrzygalne, a uczeni biorą w nich udział, to filozofia hamuje postęp w nauce.

2. Podstawiając

(a) zdanie prawdziwe na miejsce p,

(b) zdanie fałszywe na miejsce p

ustal wartość logiczną zdań zbudowanych wedle podanych niżej schematów

(a) $p \wedge p$,	(d) $p \equiv p$,	(g) $\sim (p\wedge \sim p)$,	(j) $p \Rightarrow\sim (\sim p)$,
(b) $p \vee p$,	(e) $p\wedge \sim p$,	(h) $\sim (p\vee \sim p)$,	(k) $p \Rightarrow (p \Rightarrow\sim p)$,
(c) $p \Rightarrow p$,	(f) $p\vee \sim p$,	(i) $\sim (\sim p) \Rightarrow p$,	(l) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)$.

3. Podstawiając

(a) zdania prawdziwe na miejsce p i q,

(b) zdanie prawdziwe na miejsce p i zdanie fałszywe na miejsce q,

(c) zdanie fałszywe na miejsce p i zdanie prawdziwe na miejsce q,

(d) zdania fałszywe na miejsce p i q

ustal wartość logiczną zdań zbudowanych wedle podanych niżej schematów

(a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,	(c) $(p \vee q) \Rightarrow p$,	(e) $\sim p \Rightarrow\sim (p \wedge q)$,	(g) $(p\wedge \sim p) \Rightarrow q$,
(b) $p \Rightarrow (p \wedge q)$,	(d) $p \Rightarrow (p \vee q)$,	(f) $\sim p \Rightarrow\sim (p \vee q)$,	(h) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$.

4. Która z podanych niżej informacji pozwala ustalić wartość logiczną zdania oznaczonego w niej literą Z, jeśli na miejscu p występuje zdanie prawdziwe, na miejscu q – fałszywe, a na miejscu r – zdanie o nieznanej wartości logicznej?

(a) Schematem Z jest: $p \wedge (q \vee r)$,

(b) Schematem Z jest: $p \vee (q \wedge r)$,

(c) Schematem Z jest: $\sim p \wedge (q \vee r)$,

(d) Schematem Z jest: $\sim p \vee (q \wedge r)$,

(e) Schematem Z jest: $(p \wedge q) \Rightarrow r$,

(f) Schematem Z jest: $p \Rightarrow (q \wedge r)$,

(g) Schematem Z jest: $(p \vee q) \Rightarrow r$,

(h) Schematem Z jest: $p \Rightarrow (q \vee r)$,

(i) Schematem Z jest: $(p \equiv q) \vee r$,

(j) Schematem Z jest: $(p \equiv q) \wedge r$,

(k) Schematem Z jest: $\sim p \vee \sim (q \Rightarrow r)$,

(l) Schematem Z jest: $\sim [\sim p \Rightarrow \sim (\sim q \wedge r)]$.

5. Jaką wartość logiczną posiada zdanie oznaczone literą Z, jeśli jest prawdą, że:

   (a) Z tworzy fałszywą koniunkcję z dowolnym zdaniem.

   (b) Z tworzy fałszywą koniunkcję tylko z niektórymi zdaniami.

   (c) Z tworzy prawdziwą koniunkcję z niektórymi zdaniami.

   (d) Z tworzy prawdziwą alternatywę z dowolnym zdaniem.

   (e) Z tworzy prawdziwą alternatywę tylko z niektórymi zdaniami.

   (f) Z tworzy fałszywą alternatywę z niektórymi zdaniami.

   (g) Implikacja, której pierwszym członem (poprzednikiem) jest Z, jest zawsze prawdziwa.

   (h) Implikacja, której drugim członem (następnikiem) jest Z jest zawsze prawdziwa.

   (i) Implikacja, której poprzednikiem jest Z, jest niekiedy fałszywa.

   (j) Implikacja, której następnikiem jest Z, jest niekiedy fałszywa.

   (k) Implikacja, której poprzednikiem jest Z a następnikiem $\sim Z$, jest prawdziwa.

   (l) Implikacja, której poprzednikiem jest Z a następnikiem $\sim Z$, jest fałszywa.

   (m) Implikacja, której poprzednikiem jest $\sim Z$ a następnikiem Z, jest prawdziwa.

   (n) Implikacja, której poprzednikiem jest $\sim Z$ a następnikiem Z, jest fałszywa.

6. Prawdziwe jest zdanie:
   Nieprawda, że jeśli Platon założył Akademię, to jeśli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii.
   Czy informacja ta wystarcza, by udzielić odpowiedzi na każde z podanych niżej pytań? Jeśli tak, to jakie są te odpowiedzi?

   (a) Czy Platon był założycielem Akademii?

   (b) Czy Arystoteles był uczniem Platona?

   (c) Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?

7. Czy na któreś z pytań z zadania 6 można odpowiedzieć tylko na podstawie informacji, iż:

   (a) Jeżeli Platon założył Akademię i był nauczycielem Arystotelesa, to Arystoteles uczęszczał do Akademii.

   (b) Platon założył Akademię, a Arystoteles uczęszczał do Akademii lub nie był uczniem Platona.

   (c) Nieprawda, że albo Platon nie założył Akademii i Arystoteles nie był jego uczniem, albo Arystoteles nie uczęszczał do Akademii.

   (d) Jeżeli Platon założył Akademię, to Arystoteles do niej uczęszczał; nie jest przy tym prawdą, że jeśli Arystoteles uczęszczał do Akademii, to nie był uczniem Platona.

8. Wśród pytań z zadania 6 jest tylko jedno takie, że wystarczy znać prawdziwą na nie odpowiedź, by móc odpowiedzieć na pozostałe dwa na podstawie dodatkowej informacji, iż
Jeżeli Arystoteles uczęszczał do Akademii, to Platon był założycielem Akademii i Arystoteles był uczniem Platona.
Które to pytanie?

9. Zbadać, które z podanych niżej schematów są tautologiami.

   (a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
   (b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$,
   (c) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$,
   (d) $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$,
   (e) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$,
   (f) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$,
   (g) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$,
   (h) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$,
   (i) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$,
   (j) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$.

10. Stosując skróconą metodę zero-jedynkową zbadać, które ze schematów (a)-(h) z zadania 9 są tautologiami.

11. Podane niżej schematy nie są tautologiami. Zbadać skróconą metodą zero-jedynkową, który z nich jest kontratautologią.

   (a) $\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
   (b) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q)$,
   (c) $\sim [(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$,
   (d) $(p \Rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \vee q)$,
   (e) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$,
   (f) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$.

Bibliografia

1. *Ćwiczenia z logiki* B. Stanosz

2. *Matematyka t. I* K. Szałajko