Gry z naturą

ELEMENTY TEORII GIER I MODELI EKONOMETRYCZNYCH

ALEKSANDRA SKOLIMOWSKA

KRYMINOLOGIA STOSOWANA

Gry z naturą to gry dwuosobowe. Przeciwnikiem jest natura, która nie jest zainteresowana wynikiem gry, a więc grę rozwiązuje się tylko z punktu widzenia jednego z graczy. Podejmujący decyzje musi zdecydować się na wybór reguły, są one bowiem oparte na różnych założeniach i dają różne wyniki.

Kryterium Walda

Kryterium maksyminowe (Walda) to kryterium podejmowania decyzji zaprezentowane w 1950r przez Abrahama Walda (1902-1950). Kryterium to reprezentuje podejście pesymistyczne w podejmowaniu decyzji (zakłada że zajdzie sytuacja najmniej korzystna dla podejmującego decyzję).

Stosowanie

Według kryterium Walda należy najpierw dla każdej strategii (każdego wiersza) macierzy wypłat, określić minimalną wartość (wygrana). A następnie wybrać strategię, dla której minimalna wygrana, jest największa.

$$v=\max_i\{\min_j\{a_{ij}\}\}$$

Kryterium Hurwicza

Punktem wyjścia kryterium Hurwicza jest wybór współczynnika ostrożności y ($0 \leq y \leq 1$) Dla każdej strategii należy obliczyć przeciętną wygraną według wzoru:

$$V_i(y)=y*\min(aij)+(1-y)*\max(aij)$$

a następnie wybrać tę strategię, dla której $v_i(y)$ przyjmuje wartość maksymalną.

Zauważmy, że w zależności od wyboru współczynnika ostrożności reguła Hurwicza może się stać regułą bardzo asekurancą (przy y=1 pokrywa się z kryterium Walda) albo bardzo hazardową (przy y=0 sprowadza się do wyboru maksymalnej z maksymalnych wygranych, a więc bardzo optymistycznego).

Kryterium Bayesa

Według kryterium Bayesa najlepsza jest strategia, która daje największą przeciętną wygraną obliczaną dla każdej strategii (przy założeniu, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne) jako zwykłą średnią arytmetyczną według wzoru (n – liczba stanów natury):

$$v_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Kryterium Savage'a

Kryterium Savage'a spełnia postulat minimalizacji oczekiwanych strat wynikłych z podjęcia przez nas decyzji gorszej niż najlepsza możliwa dla danego stanu natury (z punktu widzenia podejmującego decyzję). Należy wybrać tę strategię, dla której strata relatywna jest najmniejsza. Pierwszym etapem jest znalezienie macierzy strat relatywnych. Strata jest różnicą między największą wygraną możliwą dla danego stanu natury a wygraną odpowiadającą podjętej decyzji. Dla każdej kolumny macierzy wypłat (każdego stanu natury) straty relatywne oblicza się według wzoru:

$$\alpha_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

Następnie dla każdej strategii należy określić maksymalną stratę i wybrać strategię, dla której maksymalna strata będzie najmniejsza, czyli:

$$v = \min_i \left\{ \max_j \alpha_{ij} \right\}$$

Kryterium optymistyczne

Kryterium optymistyczne (dla ryzykantów) polega na określeniu dla każdej strategii maksymalnej wygranej i wyborze strategii, dla której ta maksymalna jest największa, czyli:

$$v = \max_i \left\{ \max_j a_{ij} \right\}$$

ZADANIE

Rolnik posiadający glebę klasy III ma wybrać pod uprawę jeden z trzech rodzajów zbóż. Plony tych zbóż z 1 ha, w kwintalach, w zależności od warunków klimatycznych przedstawia tabela. Który z rodzajów zbóż powinien wybrać rolnik?

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

M – liczba decyzji (w przykładzie: 3) ,

N – liczba stanów natury (w przykładzie: 3),

aij – wartość zysku (w przykładzie: wysokość plonów) wynikającego z podjęcia decyzji o numerze i przy wystąpieniu sytuacji (stanu natury) o numerze j, i =1,...,M , j =1,...,N ;

Stany natury Zboże	Susza	Normalnie	Deszcze
Żyto	24	28	36
Pszenica	31	30	28
Jęczmień	28	34	29

Kryterium wg optymisty

Dla naszego przypadku mamy:

$$\left.\begin{array}{ll} \max\limits_{j=\overline{1,3}} & a_{1j} = \max\{24, 28, 36\} = \mathbf{36} \\ \max\limits_{j=\overline{1,3}} & a_{2j} = \max\{31, 30, 28\} = 31 \\ \max\limits_{j=\overline{1,3}} & a_{3j} = \max\{28, 34, 29\} = 34 \end{array}\right\} \quad \max=36,\ i_o^* = 1$$

Kryterium wg pesymisty

Dla naszego przypadku mamy:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{j=1,3} & a_{1j} = \min\{24,28,36\} = 24 \\ \min\limits_{j=1,3} & a_{2j} = \min\{31,30,28\} = \mathbf{28} \\ \min\limits_{j=1,3} & a_{3j} = \min\{28,34,29\} = \mathbf{28} \end{array}\right\} \max=28,\ i_p^* = 2 \text{ lub } i_p^* = 3$$

Kryterium wg Hurwicza

Zauważmy: jeżeli $\alpha = 1$, to $i_{\mathrm{h}}^* = i_o^*$,

jeżeli $\alpha = 0$, to $i_{\mathrm{h}}^* = i_p^*$.

Niech $\alpha=0,4$.

Dla naszego przykładu mamy:

$$0,4 \cdot \max_{j=1,3} a_{1j} + 0,6 \cdot \min_{j=1,3} a_{1j} = 0,4 \cdot 36 + 0,6 \cdot 24 = 28,8$$

$$0,4 \cdot \max_{j=1,3} a_{2j} + 0,6 \cdot \min_{j=1,3} a_{2j} = 0,4 \cdot 31 + 0,6 \cdot 28 = 29,2$$

$$0,4 \cdot \max_{j=1,3} a_{3j} + 0,6 \cdot \min_{j=1,3} a_{3j} = 0,4 \cdot 34 + 0,6 \cdot 28 = \mathbf{30,4}$$

oraz $\max\{28,2;\ 29,2;\ \mathbf{30,4}\} = 30,4$, stąd $i_h^* = 3$.

Kryterium wg Bayes'a

Dla naszego przypadku mamy:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{N} = \frac{1}{3}$$

$$\text{dla } i = 1 \rightarrow 24 \cdot \frac{1}{3} + 28 \cdot \frac{1}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 29{,}04$$

$$\text{dla } i = 2 \rightarrow 31 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{1}{3} + 28 \cdot \frac{1}{3} = 29{,}4$$

$$\text{dla } i = 3 \rightarrow 28 \cdot \frac{1}{3} + 34 \cdot \frac{1}{3} + 29 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{30{,}03}$$

oraz $\max\{29{,}04;\ 29{,}4;\ 30{,}03\} = 30{,}03$, a stąd $i_b^* = 3$.

Kryterium wg Savage'a

Utwórzmy najpierw macierz strat. Macierz pierwotna A miała postać:

$$A = \begin{bmatrix} 24 & 28 & 36 \\ 31 & 30 & 28 \\ 28 & 34 & 29 \end{bmatrix}$$

31 34 36 ← maksymalne wygrane dla poszczególnych stanów natury

tzn. $a_1^* = \max_{i=1,M} a_{i1} = 31$,

$a_2^* = \max_{i=1,M} a_{i2} = 34$,

$a_3^* = \max_{i=1,M} a_{i3} = 36.$

Macierz strat S będzie miała wobec tego postać:

$$S = \begin{bmatrix} 31-24 & 34-28 & 36-36 \\ 31-31 & 34-30 & 36-28 \\ 31-28 & 34-34 & 36-29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$\max_{j=1,3} s_{1j} = \max\{7,6,0\} = \mathbf{7}$

$\max_{j=1,3} s_{2j} = \max\{0,4,8\} = 8$

$\max_{j=1,3} s_{3j} = \max\{3,0,7\} = \mathbf{7}$

oraz $\min\{7,8,7\} = 7$, stąd $i_s^* = 1$ lub $i_s^* = 3$.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!