TEORIA GIER

Równowaga Nasha

Kryminologia stosowana
Katarzyna Borychowska

Równowaga Nasha

Jest to profil strategii teorii gier, w którym strategia każdego z graczy jest optymalna, przyjmując wybór jego oponentów za ustalony.W teorii gier równowagą nazywamy sytuacje gdy gracze wybierają taką strategie , że gdy jeden z pozostałych graczy dokonuje zmiany swojej strategii (przy założeniu, że strategie pozostałych się nie zmienią) i to nie powoduje wygranej gracza, który zmienił swoją strategię. Taka sytuacja oznacza właśnie równowagę Nasha. Jej nazwa pochodzi od jego twórcy Johna Nasha, który był jednym z laureatów nagrody nobla w dziedzinie ekonomii w 1994 roku

Jeżeli gra posiada tylko jedną strategię równowagi Nasha, na przykład przyznanie się do winy wszystkich graczy (dylemat więźnia) to jest to jedyne rozwiązanie tej gry. Zazwyczaj gry mają więcej rozwiązań, dlatego dylemat więźnia jest uważany za jedną z łatwiejszych gier.

Twierdzenie o równowadze, J.Nash,1950

(Nash,1950) Załóżmy, że każdy ze zbiorów X_i jest zwartym wypukłym podzbiorem R^k. Załóżmy ponadto, że dla każdego i funkcja u_i jest ciągła na $X_1 \times \cdots \times X_n$ oraz jest wklęsła względem i-tej zmiennej, przy ustalonych pozostałych zmiennych. Wtedy gra Γ, określona przez zbiory X_i i funkcje u_i, posiada równowagę Nasha.

Dowód tw. Nasha

Idea tego dowodu polega na tym, żeby skonstruować odwzorowanie, które będzie miało punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy gra posiada równowagę Nasha. Wtedy sprawdzimy, że to odwzorowanie spełnia założenia twierdzenia Kakutaniego, zatem ma punkt stały, a gra ma równowagę. Dowód twierdzenia przeprowadzimy dla przypadku, gdy jest dwóch graczy. Ta zmiana upraszcza jedynie notację, natomiast dowód w ogólnym przypadku nie jest ani trochę bardziej skomplikowany.

Niech:

$$B1(y) = \{a \in X1 : u1(a,y) = \max_{x \in X1} u1(x,y)\},$$
$$B2(x) = \{b \in X2 : u2(x,b) = \max_{y \in X2} u2(x,y)\}.$$

Zbiór $B1(y)$ interpretujemy jako zbiór najlepszych odpowiedzi 1. gracza na strategię y drugiego. Podobną interpretację ma zbiór $B2(x)$. Jeśli teraz zdefiniujemy sobie multifunkcję

$$F(x,y) = B1(y) \times B2(x),$$

to to będzie to odwzorowanie, którego szukamy, bo ewentualny punkt stały takiego odwzorowania $(x*,y*) \in F(x*,y*)$ będzie miał taką własność, że $x*$ będzie najlepszą odpowiedzią na strategię $y*$ i na odwrót, czyli to będzie równowaga Nasha.

Sprawdźmy zatem, czy spełnione są założenia twierdzenia Kakutaniego.

1. Multifunkcja F jest zdefiniowana na zbiorze $U = X1 \times X2$, który jest zwarty. To można uzasadnić na wiele sposobów (wyciągając podciąg zbieżny z jednej współrzędnej, a potem z niego podciąg zbieżny po drugiej, lub mówiąc, że produkt zbiorów domkniętych i ograniczonych też ma tę własność). Jest też wypukły jako produkt zbiorów wypukłych.

2. Zbiory $B1(y)$ $(B2(x))$ są zawsze niepuste, bo każda funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje supremum na tym zbiorze.

3. Funkcja $u1(\cdot,y)$ jest wklęsła dla każdego $y \in X2$, stąd jeśli dla ustalonego y osiąga ona maksimum dla $x1$ oraz $x2$, to musi osiągać je także dla kombinacji wypukłych tych punktów, a to oznacza, że dla każdego y, zbiór $B1(y)$ jest wypukły. Podobnie można uzasadnić wypukłość $B2(x)$. Ponieważ iloczyn kartezjański dwóch zbiorów wypukłych też jest wypukły, to $F(x,Y)$ jest zbiorem wypukłym dla dowolnych x *i* y.

4. Weźmy teraz dowolny ciąg{xi}elementów zbioru *B1(y)* dla dowolnego ustalonego y, zbieżny do pewnego x. Ponieważ funkcja u1 jest ciągła, to x też należy do *B1(y)*. Zatem zbiór ten jest domknięty. Jako podzbiór X1 jest także ograniczony, a zatem zwarty. Podobnie pokazujemy, że *B2(x)* są zbiorami zwartymi. Oczywiście *F(x,y),* jako iloczyn kartezjański zbiorów zwartych, jest dla dowolnych *x i y* także zbiorem zwartym (patrz punkt 1.).

5. Domkniętość wykresu. Znowu (bez utraty ogólności) ograniczymy się do jednej współrzędnej. Załóżmy nie wprost, że wykres B1 nie jest domknięty, czyli istnieje ciąg {(xn,yn)} zbieżny do (x,y) taki, że xn $\in$ *B1(yn)*, ale *x 6* $\in$ *B1(y)*. Pierwsza z tych równości oznacza, że

$$u1(a,yn) \neg\, u1(xn,yn) \quad \forall a \in X1,$$

ale ponieważ *u1* jest ciągła, więc prawdziwe musi być także

$$u1(a,y) \neg\, u1(x,y) \quad \forall a \in X1,$$

co jest równoważne *x* $\in$ *B1(y)* – sprzeczność. Czyli wykres naszego odwzorowania jest domknięty.

A zatem wszystkie założenia twierdzenia Kakutaniego są spełnione, więc gra Γ posiada równowagę Nasha.

Wniosek

Twierdzenie Nasha dla gier dwumacierzowych wynika z powyższego twierdzenia w następujący sposób: Niech *X1 = P(W)*, gdzie W = {1,...,m} – zbiór wierszy macierzy, a X2 = P(K), gdzie K = {1,...,n} – zbiór kolumn. Dowolny rozkład prawdopodobieństwa μ = (μ1,...,μm) ∈ P(W) jest układem m liczb spełniających warunki Pi μi = 1, μi 0 ∀i. Zbiór takich μ jest wypukłym i zwartym podzbiorem Rm. Podobnie w przypadku zbioru strategii mieszanych 2. gracza. Z kolei wypłata gracza 1. (podobnie z wypłatą 2.), gdy używane są strategie μ i σ, u1(μ,σ) =PiPj Aijμiσj jest funkcją liniową (właściwie afiniczną) względem μ i σ z osobna; taka funkcja jest też w szczególności ciągła i wklęsła względem μ i σ z osobna.2 A zatem spełnione są założenia udowodnionego przez nas uogólnionego twierdzenia Nasha, i gra posiada równowagę w strategiach z X1 i X2, czyli strategiach mieszanych w wyjściowej grze dwumacierzowej.

Bibliografia

http://prac.im.pwr.wroc.pl/~wiecek/tgw1_08.pdf